

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_224761

UNIVERSAL
LIBRARY

سلسلہ شریعت امام غزالی

ہندی مخروٹا

(برائے انٹرمیڈیٹ)

تالیف

شیخ برکت علی صاحب ایم۔ اے

و
محمد خواجہ محی الدین صاحب ایم۔ اے

۱۳۵۶ھ ۱۳۲۶م ۱۹۴۷ء

طبع و اشاعت دارالکتاب اسلامیہ لاہور

فہرست مضامین

ہندی مخروطات

باب	مضمون	صفحہ
دیباجہ	الف، ب، ج	۱ تا ۳۷
پہلا باب	مخروطیوں کے عام خواص	۳۷ تا ۸۷
دوسرا باب	مکانی	۸۷ تا ۱۲۹
تیسرا باب	ناقص	۱۲۹ تا ۱۴۳
چوتھا باب	زائد	۱۴۳ تا ۱۴۹
ضمیمہ (الف)	مستدیر مخروط کی مستوی تراشیں	۱۴۹ تا ۱۷۷
ضمیمہ (ب)	نیوٹن کا مسئلہ	۱۷۷ تا ۱۸۰
ضمیمہ (ج)	مخروطی کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق	۱۸۰ تا ۱۸۲

دیسابہ

ہندی مخروطات کا یہ مختصر رسالہ حسب تصفیہ مجلس نصاب ریاضی جامعہ عثمانیہ کی انٹر میڈیٹ کی جماعتوں کے لیے جدید نصاب کی بنا پر تالیف کیا گیا ہے۔

چونکہ اس تالیف کا مقصد زیادہ تر نصاب کے مرنظر انٹر میڈیٹ کی جماعتوں کے طلبہ کی ضروریات کو پورا کرنا ہے اس لیے ہندی مخروطات کے بہت سے اہم مسائل کو مجبوراً اس رسالہ میں جگہ نہیں دی جاسکی۔ اس لحاظ سے اس رسالہ کو ہندی مخروطات کا محض ابتدائی رسالہ تصور کرنا چاہیے۔ تاہم مضمون کے تسلسل کو قائم رکھنے کی غرض سے چند ایسی دفات بھی شریک کر لی گئی ہیں جو نصاب میں داخل نہیں ہیں۔ مگر ذہین طلبہ کے لیے ان مزید دفات کا مطالعہ دلچسپی سے خالی نہ ہوگا۔

پہلے باب میں مخروطیوں کے عام خواص پر اور بعد کے ابواب میں جداگانہ مکانی، ناقص اور زائد کے خواص پر بحث کی گئی ہے۔ چونکہ پہلے باب کے عام مسائل کسی قدر مشکل ہیں اس لیے مبتدی کی سہولت کے مد نظر دوسرے باب کے مسائل اس طرح لکھے گئے ہیں کہ اگر مناسب تصور کیا جائے تو اس باب کو پہلے پڑھ کر پہلے باب کا مطالعہ بعد میں کیا جاسکتا ہے۔

مختلف مسائل کے تحت کافی تعداد میں مشقی سوالات دیے گئے ہیں

اور کہیں کہیں طالب علم کی سہولت کی غرض سے مشکل سوالات کے اشارے
یا اصل بھی دینے کیے گئے ہیں۔ ان مشکل سوالات میں سے بعض بذاتِ خود
سُلوں کی سی اہمیت رکھتے ہیں۔

مؤلفین

شیخ برکت علی و محمد خواجہ محی الدین

نوٹ

جامعہ عثمانیہ کے امتحان انٹرمیڈیٹ کے نصاب میں صرف
مندرجہ ذیل دفعات شامل ہیں:-

۱ تا ۵، ۱۷، ۱۹، ۲۱ تا ۳۹، ۴۱، ۴۲، ۴۴ تا ۵۷، ۵۷

۵۸، ۶۰ تا ۶۳ -

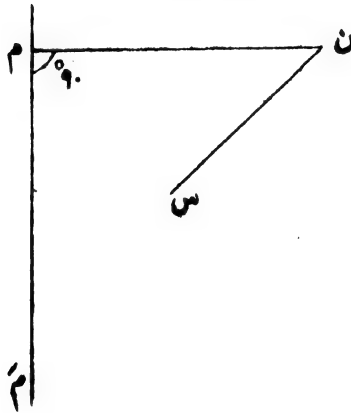
بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ہندی مخروط

پہلا باب

مخروطیوں کے عام خواص

۱۔ تعریفات - س ایک ثابت نقطہ اور م ایک ثابت خط مستقیم ہے۔ اگر ان میں سے گزرنے والی سطح مستوی میں ایک نقطہ ن اس طرح



حرکت کرے کہ س سے ن کا فاصلہ س ن، خط م م سے ن کے عمودی فاصلہ

ن م کے ساتھ ایک مستقل نسبت نہ رکھتا ہو تو ن کے طریق کو مخروطی تراش یا اختصاراً مخروطی کہتے ہیں۔

ثابت نقطہ س کو مخروطی کا ماسکہ کہتے ہیں، ثابت خط مستقیم م م کو مخروطی کا مرتب کہتے ہیں۔ مستقل نسبت نہ کو مخروطی کا خروج المرکز کہتے ہیں۔

اگر خروج المرکز $ز = ۱$ تو مخروطی کو مکانی کہتے ہیں۔

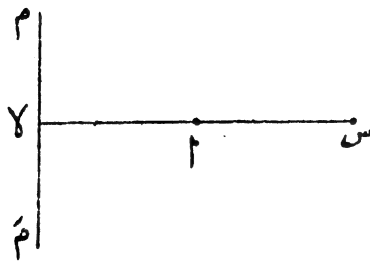
اگر خروج المرکز $ز > ۱$ تو مخروطی کو ناقص کہتے ہیں۔

اگر خروج المرکز $ز < ۱$ تو مخروطی کو زائد کہتے ہیں۔

نوٹ :- ان منحنیوں کو مخروطی تراشیں اس لیے کہتے ہیں کہ سب قسم کی مخروطی تراشیں ایک مستدیر مخروط کو مختلف میدان والی مستوی سطحوں سے تراشنے سے حاصل کی جاسکتی ہیں۔ اس امر کا ثبوت صرف قائم مستدیر مخروط کی صورت میں ضمیمہ میں دیا جائیگا۔

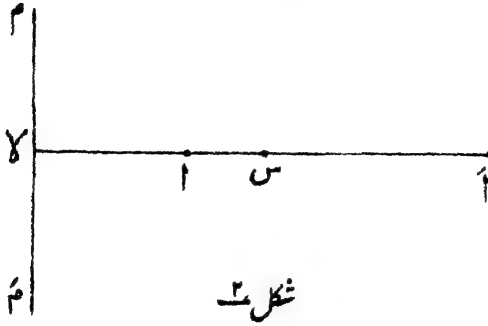
۲۔ اس باب میں ہمارا مقصد یہ ہے کہ چند ایسے اہم خواص کی تحقیق کریں جو سب مخروطیوں (مکانی، ناقص، زائد) میں مشترک ہیں۔ اولاً ہم مخروطیوں کی شکل کی تحقیق کریں گے۔

فرض کرو کہ مخروطی کا ماسکہ س ہے، مرتب م م ہے اور خروج المرکز ز ہے ماسکہ س سے مرتب م م پر عمود س لا نکالا گیا ہے۔ ہم س لا پر کے وہ نقطے معلوم کرنا چاہتے ہیں جو مخروطی پر بھی واقع ہیں۔ صورت اول - مکانی - (دیکھو شکل ۱)۔



شکل ۱

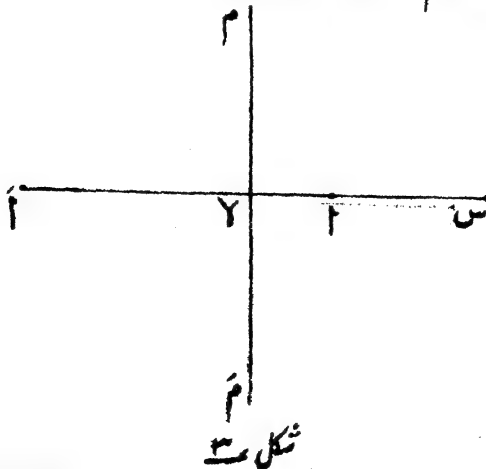
اس صورت میں اگر s کا وسطی نقطہ ۲ ہو تو مکانی کی تعریف سے ظاہر ہے کہ نقطہ ۱ مکانی پر کا نقطہ ہوگا اور مکانی کا یہ ایک ہی نقطہ ہے جو s کا بیرونی محدود فاصلہ پر ہے۔
صورت دوم - ناقص - (دیکھو شکل ۱۷)۔



s کا داخلی تقسیم نقطہ ۱ پر اور خارجی تقسیم نقطہ ۲ پر اس طرح کہ

$$\frac{s}{۱} = \frac{s}{۲} \quad (جو چھوٹا ہے ۱ سے)$$

ظاہر ہے کہ ۱ مرتبہ m کی اُسی جانب واقع ہوگا جس جانب کہ اس کے s ناقص کی تعریف سے ظاہر ہے کہ s کا پر کے دو نقطے ۱ اور ۲ ناقص پر کے نقطے ہیں۔
صورت سوم - زائد (دیکھو شکل ۱۸)



س کو مرکز مان کر ز × ح لا کے نصف قطر پر دائرہ کھینچو جو ہ ہ سے
ن اور ن پر ملے، تب ن اور ن مخروطی پر کے مطلوبہ نقطے ہونگے۔
ن اور ن سے مرتب پر بالترتیب عمود ن م اور ن م نکالو۔
م ن اور م ن کو ملاؤ۔

$$\frac{م ن}{ن م} = \frac{ز \times ح}{ع} = ز \quad \text{یعنی ن مخروطی پر کا نقطہ ہے۔}$$

اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ ن بھی مخروطی پر کا نقطہ ہے۔

نوٹ - مکانی کی صورت میں ظاہر ہے کہ خط ہ ہ پر نقاط ن اور ن صرف
اُس صورت میں حاصل ہونگے جبکہ نقاط ع اور س نقطہ ا کی ایک ہی جانب ہوں۔

دفعہ ۸ میں ثابت کیا جا چکا کہ ناقص کی صورت خط ہ ہ پر نقطے ن اور
صرف اُس صورت میں حاصل ہونگے جبکہ ع نقاط ا اور ا کے درمیان ہو اور
زاہ کی صورت میں نقاط ن اور ن صرف اُس صورت میں حاصل ہونگے جبکہ
ع نقاط ا اور ا کے درمیان نہ ہو (دیکھو اشکال ۳ و ۲ متعلقہ دفعہ ۲)۔

۴ - چونکہ متساوی الساقین مثلث س ن ن کے قاعدہ ن ن پر
س ع عمود ہے اس لیے ن ن کا وسطی نقطہ ع ہوگا۔ پس معلوم ہوا کہ
مخروطی کے اُس وتر ن ن کی جو مرتب کے متوازی ہے خط س لا عمودی
تصییف کرتا ہے۔

تعریفات :- اگر ایک منحنی کی سطح میں ایک خط ایسا ہو کہ یہ خط
منحنی کے ہر ایسے وتر کی جو اس پر عمود ہو تصییف کرتا ہو تو منحنی بمطابق خط مذکور کے
متشاکل کہلاتا ہے، خط مذکور کو منحنی کا ایک محور کہتے ہیں اور منحنی اور محور کے
نقطہ یا نقاط تقاطع کو منحنی کے رأس کہتے ہیں۔

پس ذیل کا مسئلہ حاصل ہوا:

مخروطی تراش بمطابق اُس خط کے جو اس کے میں سے گزرتا ہے اور مرتب پر
عمود ہے متشاکل ہے۔

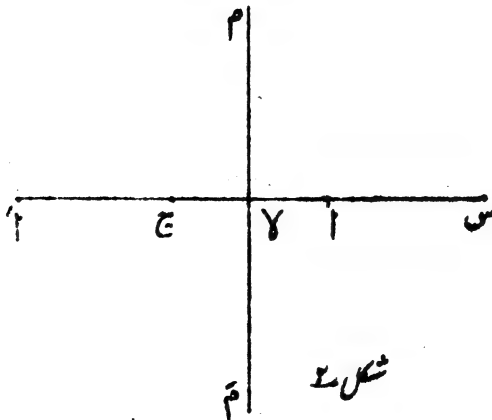
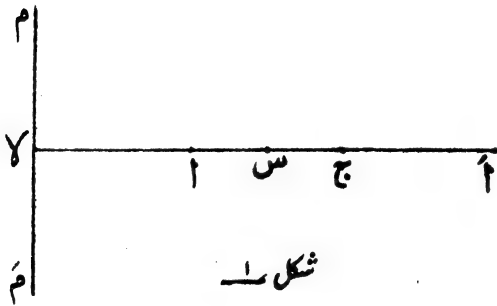
نیز مکانی کا ایک رأس ا ہے اور ناقص اور زائید میں سے ہر ایک کے

دو راس ۱ اور ۲ ہیں۔

نوٹ :- مکانی کی صورت میں اگر س لا کی خارجی تقسیم ۱ پر ۱:۱ کی نسبت میں کی جائے تو نقطہ ۱ لاتنا ہی پر ہوگا۔ پس معلوم ہوا کہ مکانی کا ایک اور راس ۲ ہے جو لاتنا ہی پر ہے۔

۵۔ اگر دفعہ ۲ کی ترقیم کے مطابق ناقص یا زائد کے راس ۲، ۱ ہوں اور ۱ کا وسطی نقطہ ج ہو (اور علامتوں کو ملحوظ نہ رکھا جائے) تو

$$\begin{aligned} \frac{س ۱}{لا ۱} &= \frac{س ۲}{لا ۲} \\ \frac{س ۱ + س ۲}{لا ۱ + لا ۲} &= \frac{س ۱}{لا ۱} \quad \text{اس لیے} \\ \frac{س ۱ - س ۲}{لا ۱ - لا ۲} &= \end{aligned}$$



پس ناقص (شکل ۱) کی صورت میں

$$\frac{س ۱}{۷۱} = \frac{۱ ج ۲}{۷ ج ۲} = \frac{۲ ج ۳}{۱ ج ۲}$$

اور زائد (شکل ۲) کی صورت میں

$$\frac{س ۱}{۷۱} = \frac{۲ ج ۳}{۱ ج ۲} = \frac{۱ ج ۲}{۷ ج ۲}$$

پس ناقص اور زائد دونوں میں

$$\frac{ج ۳}{۱ ج ۲} = \frac{۱ ج ۲}{۷ ج ۲} = \frac{س ۱}{۷۱} = ز$$

جس سے ذیل کے نتائج حاصل ہو گئے ہیں :

$$(۱) \dots\dots\dots ۷ ج \times ج س = ۱ ج$$

$$(۲) \dots\dots\dots ۱ ج \times ز = ج س$$

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{۱ ج}{ز} = ج ۷$$

$$\text{اور } ز = \frac{ج س}{۱ ج} \times \frac{۱ ج}{۷ ج} = \frac{ج س}{۷ ج}$$

$$(۴) \dots\dots\dots ۱ ج \times ز = ج س \quad \text{یعنی}$$

امثلیہ

دفعہ (۲) کی ترقیم کے مطابق

$$(۱) \text{ مکانی مرتسم کرو جس میں } س ۷ = ۲$$

$$(۲) \text{ ناقص مرتسم کرو جس میں } س ۷ = ۶ \text{ سمر اور } ز = \frac{۱}{۲}$$

$$(۳) \text{ زائد مرتسم کرو جس میں } س ۷ = ۵ \text{ سمر اور } ز = ۲$$

$$(۴) \text{ زائد مرتسم کرو جس میں } س ۷ = ۵ \text{ سمر اور } ز = \frac{۲}{۵}$$

$$(۵) \text{ اگر مخروطی پر دو نقطے } ن \text{ اور } ن' \text{ ایسے ہوں کہ } س ن = س ن' \text{ تو}$$

ثابت کرو کہ s ن اور s ن مخروطی کے محور s لا کے ساتھ مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بناتے ہیں۔

(۶) مخروطی کا ایک مرتب اور مخروطی پر کے دو نقطے معلوم ہیں۔ مخروطی کے ماسک کا طریق معلوم کرو۔

(۷) مخروطی کا ایک مرتب اور مخروطی پر کے تین نقطے معلوم ہیں۔ مخروطی کا ماسک معلوم کرو۔ اس سوال کے کتنے حل ہیں؟

(۸) مخروطی کا ماسک s ہے اور s سے مرتب پر عمود s لا ہے۔ اگر مخروطی پر کا کوئی نقطہ n ہو تو ثابت کرو کہ s ن کے وسطی نقطہ کا طریق بھی ایک مخروطی ہے جس کا ماسک s پر ہے اور مرتب s لا کے وسطی نقطہ میں سے گزرتا ہے اور اس کا خروج مرکز دیے ہوئے مخروطی کے خروج مرکز کے مساوی ہے۔

(۹) مخروطی کا ماسک s ہے اور مخروطی پر کا کوئی نقطہ n ہے، s ن پر ایک نقطہ q اس طرح لیا گیا ہے کہ s ق : s ن ایک مستقل مقدار ہے۔ ق کا طریق معلوم کرو۔

(۱۰) ثابت کرو کہ دو مخروطی جن کا ایک ماسک اور جواب کا مرتب وہی ہو، ایک دوسرے کو قطع نہیں کر سکتے۔

(۱۱) مخروطی کا ماسک، خروج مرکز اور مخروطی پر کے دو نقطے دیے گئے ہیں مخروطی کا مرتب معلوم کرو۔ اس سوال کے کتنے حل ہیں؟

(۱۲) مخروطی کا مرتب، خروج مرکز اور مخروطی پر کے دو نقطے معلوم ہیں مخروطی کا ماسک معلوم کرو۔ اس سوال کے کتنے حل ہیں؟

(۱۳) n ن مخروطی کا ایک وتر ہے جو ماسک s میں سے گزرتا ہے اور n ن کے وسطی نقطہ v سے مرتب پر عمود v ک نکالا گیا ہے ثابت کرو کہ

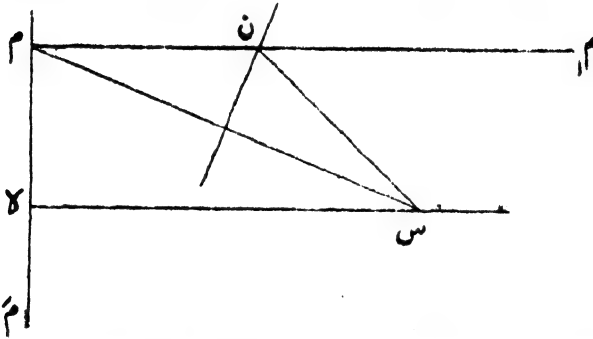
$$\frac{vn}{vn} = z \quad \text{جہاں } z \text{ خروج مرکز ہے}$$

(۱۴) اگر ایک دائرہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے اور ایک ثابت خط کو ایک مستقل زاویہ e پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے

جس کا خروج مرکز قطع ہے۔

۶۔ مخروطی کا ماسکہ س، مرتب م م اور خروج مرکز ز معلوم ہیں، کوئی خط م م مرتب پر عمود وار ہے۔ ہم م م پر وہ نقطہ یا نقطہ معلوم کرنا چاہتے ہیں جو مخروطی پر بھی واقع ہیں۔

صورت اول۔ فرض کرو کہ مخروطی مکانی ہے (یعنی $z = 1$) نیز فرض کرو کہ دیا ہوا خط م م مخروطی کے مرتب م م سے م پر ملتا ہے۔ ماسکہ س کو م سے ملاؤ۔ فرض کرو کہ س م کا عمودی ناصف، م م سے نقطہ ن پر ملتا ہے تب مکانی پر کا مطلوبہ نقطہ ن ہو گا کیونکہ $\frac{ن}{م} = 1$

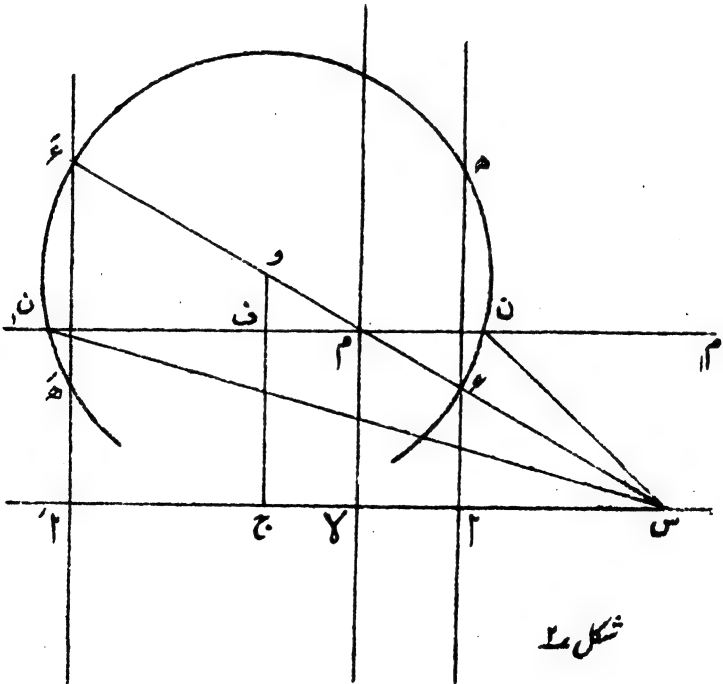
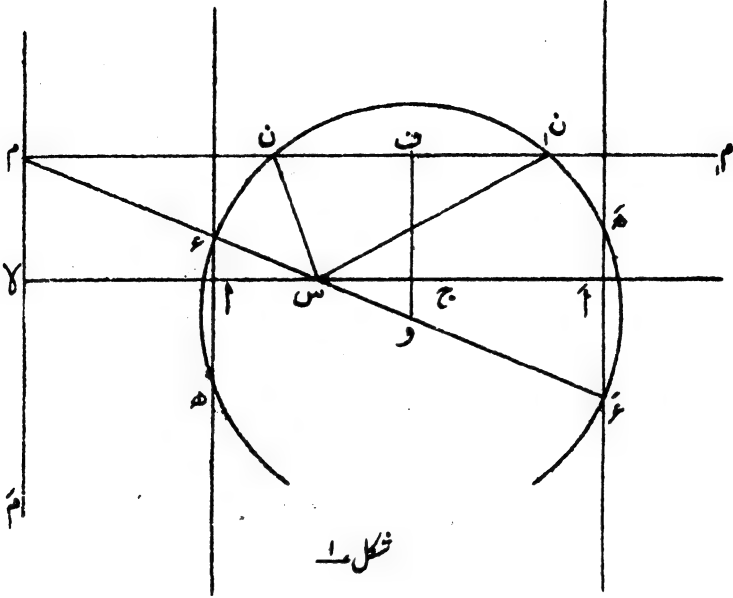


صورت دوم۔ فرض کرو کہ مخروطی ناقص یا زائد ہے اور مخروطی کے رأس ۱ اور ۱ ہیں۔ نیز فرض کرو کہ دیا ہوا خط م م مخروطی کے مرتب سے م پر ملتا ہے۔ مخروطی کے ماسکہ س کو م سے ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ خط جو ۱ میں سے گزرتے ہیں اور مرتب کے متوازی ہیں خط س م (ممدودہ بشرط ضرورت) سے بالترتیب نقاط ع، ع پر ملتے ہیں۔

متوازی خطوط کے قاطعوں کے خواص سے حاصل ہوتا ہے:

$$z = \frac{س ۱}{۸۱} = \frac{س ۶}{م ۶}$$

$$z = \frac{س ۱}{۸۱} = \frac{س ۶}{م ۶} \quad \text{اور}$$



اس لیے س م کی داخلی اور خارجی تقسیم ایک ہی نسبت زمین بالترتیب م اور ع پر ہوتی ہے۔

ع ع کے قطر پر ایک دائرہ (و) کھینچو۔ فرض کرو کہ دائرہ (و) ویسے ہوئے خط م م سے نقاط ن، ن پر ملتا ہے۔ تب ن اور ن مطلوبہ نقاط ہونگے۔

$$\text{کیونکہ } \frac{\text{س ن}}{\text{ن م}} = \frac{\text{س ع}}{\text{ع م}} = \frac{\text{س ۱}}{\text{۱ ۲}} = \text{ز}$$

اور اسی طرح سے $\frac{\text{س ن}}{\text{ن م}} = \text{ز}$

پس ثابت ہوا کہ ن اور ن مطلوبہ نقطے ہیں۔
۷۔ اگر ع ع قطر پر کے دائرہ کے مرکز و میں سے ایک خط کھینچا جائے جو مرتب کے متوازی ہو تو یہ خط ۱ ۱ کے وسطی نقطہ ج میں سے گزرے گا اور نیز وتر ن ن کی عمودی تنصیف کریگا۔

پس معلوم ہوا کہ مخروطی کے محور کے متوازی کسی وتر ن ن کا وسطی نقطہ ف (فرض کرو) اس خط پر واقع ہے جو ۱ ۱ کے وسطی نقطہ ج میں سے گزرتا ہے اور مرتب کے متوازی ہے۔

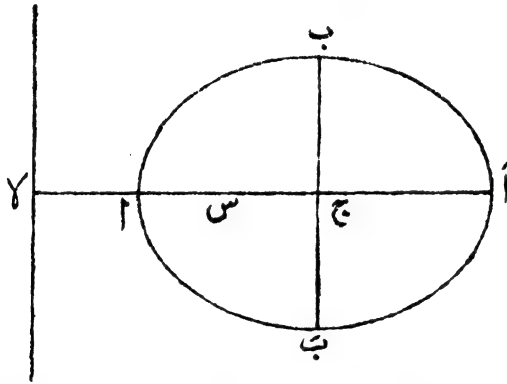
پس دفعہ ۴ کی تعریف کے بموجب ذیل کا مسئلہ حاصل ہوا۔
مخروطی (ناقص یا زائد) متشاکل ہے بلحاظ اس خط کے جو رأسوں کو ملانے والے خط کے وسطی نقطہ میں سے گزرتا ہے اور مرتب کے متوازی ہے۔
پس ثابت ہوا کہ ناقص اور زائد کی صورت میں مخروطی کے متشاکل کے دو محور ہیں جن میں سے ایک مرتب پر عمود وار ہے اور دوسرا مرتب کے متوازی ہے۔

ان محوروں میں امتیاز کرنے کی غرض سے اس محور کو جو مرتب پر عمود وار ہے مخروطی کا قاطع محور اور اس محور کو جو مرتب کے متوازی ہے مزدوج محور کہتے ہیں۔

۸۔ اگر دفعہ گذشتہ کی شکل میں دائرہ (و) خطوط ع ع اور ع ع سے مرکز بالترتیب نقاط ہ اور ہ پر ملے تو خطوط ع ع اور ع ع دونوں ۱ ۱ کے متوازی ہونگے۔

کیونکہ زاویے $عہ$ اور $عہ$ دونوں قائمے ہیں۔ اس لیے $عہ = آ = ہ$ ۔ ناقص کی صورت میں (دیکھو شکل ۱۔ دفعہ ۶) وتر $ن$ بمقابلہ $عہ$ کے دائرہ کے مرکز سے زیادہ دور ہے۔ کیونکہ نقاط $ع$ اور $ع$ نقطہ $م$ کی ایک ہی جانب ہیں۔ اس لیے $ن$ ، $عہ$ یعنی $ن$ ، $آ$ پس معلوم ہوا کہ ناقص کلیتہً خطوط $اع$ اور $آع$ کے درمیان واقع ہے۔

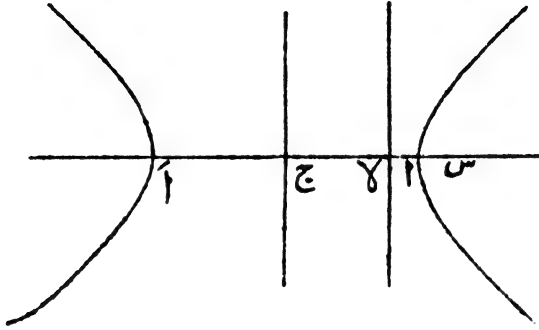
اگر ناقص پر کا کوئی نقطہ $ن$ ہو اور $ن$ $م$ سمود ہو مرتب پر تو $ن$ $م$ $آ$ کیونکہ $ن$ خطوط $اع$ اور $آع$ کے درمیان واقع ہے۔ اس لیے $س$ $ن$ $س$ یعنی ناقص پر کا ہر نقطہ ماسکے $س$ سے محدود فاصلہ پر ہے۔ پس معلوم ہوا کہ ناقص ایک بند بیضوی تختی ہے۔



اگر خط $ب$ ج $ب$ متوازی ہو مرتب کے اور نقاط $ب$ اور $ب$ ایسے ہو کہ $س$ $ب = س$ $ب = ز \times ج$ لا تو $ب$ اور $ب$ ناقص پر کے نقطے ہونگے اور یہ نقطے مزدوج محور کے سرے ہونگے۔

زائد کی صورت میں (دیکھو شکل ۱۔ دفعہ ۶) وتر $ن$ بمقابلہ $عہ$ کے دائرہ کے مرکز سے زیادہ قریب ہے کیونکہ نقاط $ع$ اور $ع$ نقطہ $م$ کی مخالف جانبوں میں واقع ہیں اس لیے $ن$ ، $عہ$ یعنی $ن$ ، $آ$ پس معلوم ہوا کہ زائد کلیتہً خطوط $اع$ اور $آع$ کے باہر واقع ہے۔ چونکہ نقطہ $م$ دائرہ کے اندر ہے اس لیے خط $م$ ، دائرہ کو ہمیشہ حقیقی نقطوں پر

قطع کرتا ہے۔ نیز ظاہر ہے کہ لام کو کافی بڑا لینے سے ن کا طول بھی بے حد بڑھایا جاسکتا ہے۔ پس معلوم ہوا کہ زائد ایک منحنی ہے جس کی دو علامتہ علامتہ شاخیں ہیں جیسا کہ شکل ذیل میں دکھایا گیا ہے۔

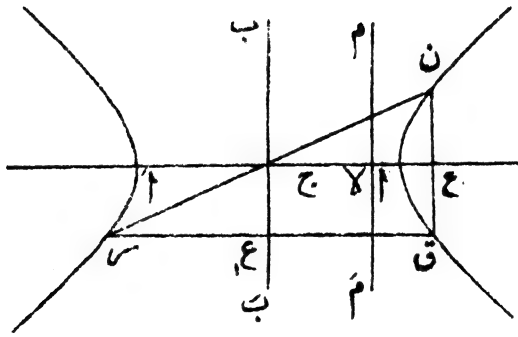
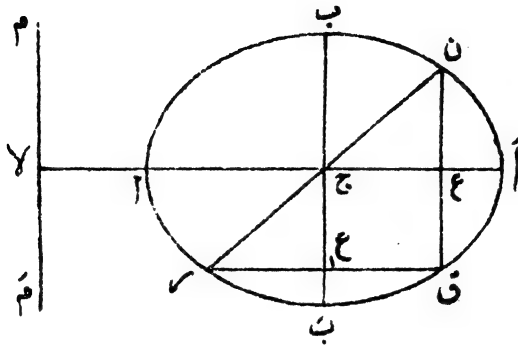


۹۔ مرکز دار مخروطی - فرض کرو کہ ناقص یا زائد پر کا کوئی نقطہ

ن ہے۔ ن میں سے قاطع محور پر عمود وار ایک خط کھینچو جو قاطع محور ۱۲ (ممدودہ بشرط ضرورت) کو نقطہ ع پر اور منحنی کو مکرر نقطہ ق پر قطع کرے۔ تب دفعہ ۳ کی رو سے ن ع = ع ق، اب ق میں سے مزدوج محور پر عمود وار ایک خط کھینچو جو مزدوج محور ب ج ب کو نقطہ ع پر اور منحنی کو مکرر نقطہ س پر قطع کرے، تب دفعہ ۲ کی رو سے ق ع = ع س

چونکہ ن ق = ۲ ن ع اور ق س = ۲ ق ع اس لیے حاصل ہوتا ہے کہ ن ج س ایک خط مستقیم ہے اور ن ج = ج س پس اگر ناقص یا زائد پر کا کوئی نقطہ ن ہو اور ن ج ممدودہ پر نقطہ س اس طرح لیا جائے کہ ج س = ن ج تو نقطہ س بھی منحنی پر واقع ہوگا۔ پس نقطہ ج میں سے گزرنے والے ہر وتر کی تنصیف

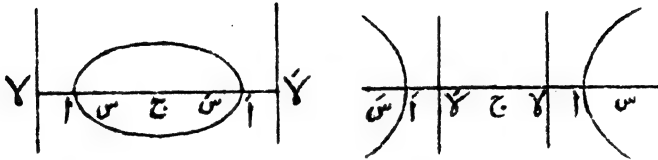
نقطہ ج پر ہوتی ہے۔ اس خاصیت کی بنا پر نقطہ ج کو خودطالت کا مرکز کہتے ہیں۔



اور کسی وتر کو جو مرکز میں سے گزرے خودطالت کا قطر کہتے ہیں۔
 ناقص اور زائد دونوں مرکز دار خودطالت تراشیں ہیں اور مکانی کا کوئی
 مرکز حدود فاصلہ پر وجود نہیں رکھتا۔
 ۱۰۔ مسئلہ - مرکز دار خودطالت کے دو ماسکے اور دو مرتب

ہوتے ہیں۔

دفعہ ۱ میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ناقص اور زائد دونوں اُس خط کے لحاظ سے متشاکل ہیں جو ج میں سے گزرتا ہے اور مرتب کے متوازی ہے۔ اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر قاطع محور پر نقاط $س$ اور $لا$ ایسے لیے جائیں کہ $ج س = ج لا$ اور $لا$ میں سے ایک خط $م لا$ قاطع محور پر عمود وار کھینچا جائے تو $س$ اور خط $م م$ منحنی کے ساتھ



وہی خصوصیات رکھینگے جو نقطہ $س$ اور خط $م م$ رکھتے ہیں۔ پس ثابت ہوا کہ منحنی کا ایک اور ماسکہ $س$ ہے اور اس کے جواب کا مرتب $م م$ ہے۔ یعنی ناقص اور زائد میں سے ہر ایک کے دو ماسکے اور ان کے جواب کے دو مرتب ہوتے ہیں۔

۱۱۔ ترقیم۔ اس کتاب میں سہولت اور اختصار کے مد نظر خاص خاص نقطوں اور خطوں کے لیے مخصوص حروف استعمال کیے گئے ہیں۔ سوائے ان چند صورتوں کے جہاں اس کے خلاف بالتصريح بیان کر دیا گیا ہے طالب علم کو چاہیے کہ وہ بھی اسی ترقیم کو ملحوظ رکھے تاکہ مسئلوں اور مخروطوں کے اہم خواص کو یاد رکھنے میں اُسے سہولت ہو۔ محولہ بالا ترقیم حسب ذیل ہے۔

ایک ماسکہ $س$ اور اس کے جواب کا مرتب $م م$
 دوسرا ماسکہ $س$ اور اس کے جواب کا مرتب $م م$
 $س$ کے ساتھ مرتبوں $م م$ اور $م م$ کے نقاط تقاطع بالترتیب $لا$ اور $لا$
 مخروطی کا خروج المرکز ز

مخروطی پر کا کوئی نقطہ ن اور ن سے مرتب پر عمود ن م

مخروطی کے راس ۱، ۱' مخروطی کا مرکز ج

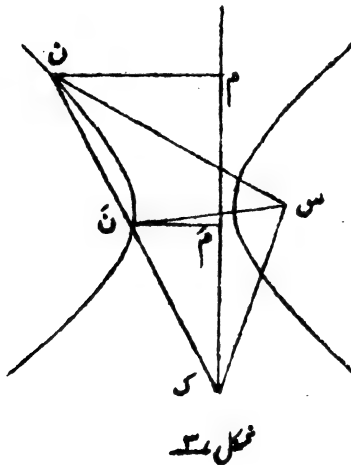
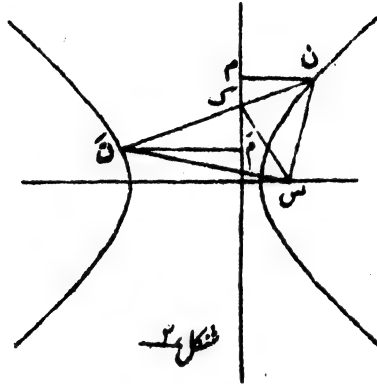
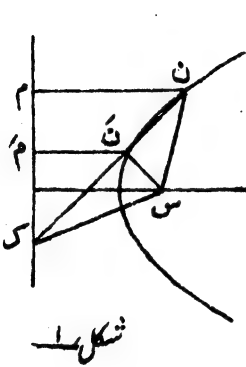
مرکز دار مخروطی کا مزدوج محور ب ب

مندرجہ بالا ترقیم کے علاوہ جہاں کہیں خاص نقطوں کو تعبیر کرنے کے لیے مخصوص

حروف استعمال کیے جائیں گے ان کی تشریح وقتاً فوقتاً کی جائیگی۔

۱۱۔ مسئلہ۔ اگر مخروطی پر کے دو نقطوں ن، ن کو ملانے والا خط ایک مرتب سے

ک پر ملے اور اس مربع کے جواب کا ماسکہ س ہو تو س ک خطوط س ن، س ن کے درمیانی زاویوں میں سے کسی ایک کا نصف ہوگا۔



ن اور ن سے مرتب پر عمود ن م اور ن م نکالو۔

$$\frac{\text{سن}}{\text{ن م}} = \frac{\text{سن}}{\text{ن م}} \quad \text{کیونکہ ہر ایک نسبت مخروطی کے خروج المرکز کے مساوی ہے}$$

$$\frac{\text{سن}}{\text{ن م}} = \frac{\text{ن م}}{\text{ن م}} = \frac{\text{ن گ}}{\text{ن گ}} \quad (\text{کیونکہ مثلثات ن م ک، ن م ک متشابه ہیں})$$

اس لیے اشکال (۱) اور (۳) میں جہاں دونوں نقطے ن اور ن مخروطی کی ایک ہی شاخ پر ہیں خط سن ک، ن س کی خارجی تنصیف کرتا ہے اور شکل ۱ میں جہاں نقاط ن اور ن مخروطی (زائد) کی مختلف شاخوں پر ہیں خط سن ک، ن س کی داخلی تنصیف کرتا ہے۔

پس ثابت ہوا کہ ن گ، ن س کا خارجی ناصف ہے جبکہ نقاط ن اور ن مخروطی کی ایک ہی شاخ پر ہوں اور داخلی ناصف ہے جبکہ ن، ن مخروطی (زائد) کی مختلف شاخوں پر ہوں۔

فرع۔ ایک خط مستقیم مخروطی کو دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کر سکتا۔ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ایک خط مخروطی کو نقاط ن، ن، ن پر قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ یہ خط ماسکہ س کے متناظر مرتب سے ک پر ملتا ہے۔

تب مسئلہ بالالہی رو سے س ک تینوں خطوط سن، سن اور سن سے مساوی زاویے بناتا ہے اور یہ ناممکن ہے۔ (اگر مخروطی زائد ہو تو طالب علم خود مختلف صورتوں کے لیے مناسب شکلیں کھینچے)۔

امثلہ ۲

(۱) مخروطی کا ایک ماسکہ اور مخروطی پر کے دو نقطے دیے گئے ہیں۔

ثابت کرو کہ دیے ہوئے ماسکہ کے جواب کا مرتب دو ثابت نقطوں میں سے ایک نہ ایک میں سے گزرتا ہے۔

(۲) مخروطی کا ایک ماسکہ اور مخروطی پر کے تین نقطے معلوم ہیں، مخروطی کا

مرتب معلوم کرو۔ بتاؤ کہ اس سوال کے چار مل ہیں جن میں کم از کم تین حلوں کے جواب میں مخروطی زائد ہے۔

(۳) مخروطی کے ماسکے میں سے گزرنے والے کوئی دو وترن $س ن$ اور $ق س ق$ ہیں۔ ثابت کرو کہ $ن ق$ اور $ن ق$ کا نقطہ تقاطع ماسکے میں کے جواب کے مرتب پر ہے۔

(۴) مخروطی کا ایک ماسکے مخروطی پر کے دو نقطے اور مخروطی کے قاطع محور کی سمت معلوم ہیں مخروطی کا مرتب دریافت کرو۔

(۵) مخروطی کے ماسکے میں سے گزرنے والا کوئی وترن $ن$ ہے اور $ق$ مخروطی پر کا کوئی اور نقطہ ہے، اگر $ن ق$ اور $ن ق$ ماسکے میں کے جواب کے مرتب سے بالترتیب $ک$ اور $ک$ پر ملیں تو ثابت کرو کہ $ک$ میں کا قائم ہے۔

(۶) $ن س ن$ مخروطی کا کوئی وتر ہے جو ماسکے میں سے گزرتا ہے اور مخروطی کا ایک رأس $ا$ ہے، $ن ا$ اور $ن ا$ ماسکے میں کے جواب کے مرتب سے بالترتیب $ک$ اور $ک$ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ $ک لا \times لا ک = لا س$ جہاں $لا$ قاطع محور اور مرتب کا نقطہ تقاطع ہے۔

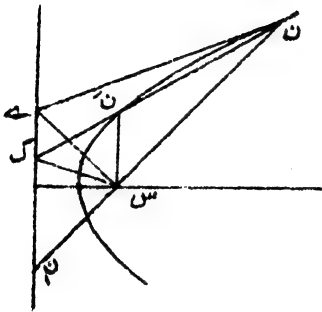
(۷) مخروطی کا ماسکے معلوم کرو جبکہ مرتب، ایک رأس اور مخروطی پر کا ایک نقطہ معلوم ہیں۔

(۸) اگر مخروطی کا ایک ماسکے، ایک رأس اور مخروطی پر کا ایک اور نقطہ معلوم ہوں تو دیے ہوئے ماسکے کے جواب کا مرتب معلوم کرو۔

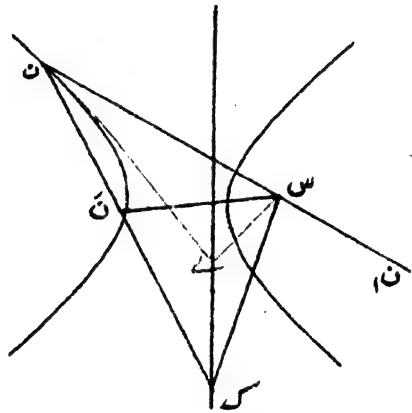
(۹) $ن ن$ مرکز دار مخروطی کا کوئی قطر ہے اور مخروطی کا ایک ماسکے میں ہے۔ ثابت کرو کہ ناقص کی صورت میں $س ن + س ن$ مستقل ہے اور زائد کی صورت میں $س ن$ اور $س ن$ کا فرق مستقل ہے۔

۱۲ - تعریفات - اگر ایک منحنی پر $ن$ اور $ن$ دو نقطے ہوں تو وترن $ن$ کے انتہائی مقام کو جبکہ $ن$ منحنی پر حرکت کر کے نقطہ $ن$ کے نہایت قریب آ جاتا ہے (اور بالآخر $ن$ پر منطبق ہو جاتا ہے) نقطہ $ن$ پر منحنی کا مماس کہتے ہیں اور نقطہ $ن$ مماس کا نقطہ مماس کہلاتا ہے،

نیز وہ خط جن میں سے گزرتا ہے اور N پر کے ماس پر عمود ہے N پر منحنی کا
 عماد کہلاتا ہے۔
 ترقیم۔ منحنی کے کسی نقطہ N پر کے عماد اور قاطع محور کا نقطہ تقاطع عموماً
 گ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔
 ۱۳۔ مسئلہ :- اگر مخروطی کے کسی نقطہ N پر کا ماس ایک
 مرتب سے S پر ملے اور اس مرتب کے جواب کا ماس K سے ہو تو
 N سے S قائم ہوگا۔



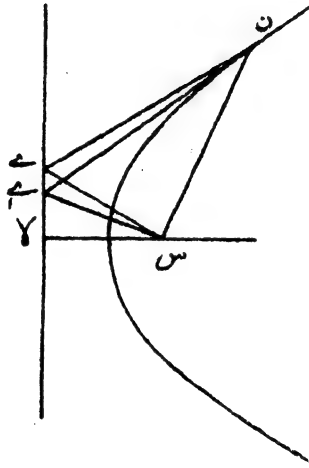
شکل ۱۔



شکل ۲۔

فرض کرو کہ مخروطی پر N کے قریب ایک اور نقطہ N' ہے۔ اور خط مستقیم
 NN' محدود مرتب سے K پر ملتا ہے۔
 N سے K تک خارج کرو، تب دفعہ ۱۱ کی رو سے S سے K
 NN' کا خارجی ناصف ہوگا کیونکہ N' مخروطی کی ایک ہی
 شاخ پر ہیں۔
 جیسے جیسے N' کے قریب آتا جاتا ہے، K سے کے قریب

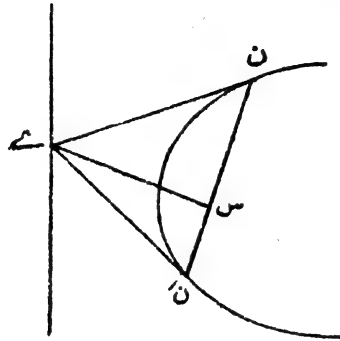
آتا جاتا ہے اور \angle ن س ن دو قائموں کے قریب آتا جاتا ہے۔ اس لیے بالآخر جب ن ن پر منطبق ہو جائے تو \angle ن س ن = $\frac{1}{2} \times$ قائمہ = قائمہ اس لیے \angle ن س ن سے بھی قائمہ ہے۔
 عکس۔ اگر مخروطی پر کوئی نقطہ ن ہو اور ماسکہ م سے س ن پر عمود م سے کھینچا جائے جو م کے جواب کے مرتب سے م سے پر ملے تو ن سے مخروطی کے نقطہ ن پر کا ماسکہ ہو گا۔



اگر ن سے مخروطی کا ماسکہ نہیں ہے تو فرض کرو کہ ن پر کا ماسکہ مرتب سے م سے پر ملتا ہے تب \angle ن س ن سے قائمہ ہے نیز بموجب مفروض \angle ن س ن سے بھی قائمہ ہے اس لیے خط م سے منطبق ہے م سے پر یعنی نقاط م اور م ایک دوسرے پر منطبق ہیں اس لیے ن سے مخروطی کا ماسکہ ہے۔

نوٹ۔ اگر مخروطی کا ایک ماسکہ اور اس کے جواب کا مرتب معلوم ہو تو مسئلہ بالا کے عکس کی مدد سے مخروطی کے کسی نقطہ پر کا ماسکہ کھینچ سکتا ہے۔
 ۱۴۔ تعریف۔ مخروطی کے ماسکہ میں سے گزرنے والا کوئی وتر ماسکی وتر کہلاتا ہے۔

مسئلہ۔ مخروطی کے کسی ماسکی وتر کے سروں پر کے تماس ایک دوسرے کو متناظر مرتب پر قطع کرتے ہیں۔



فرض کرو کہ ن س ن مخروطی کا کوئی ماسکی وتر ہے۔ ماسکے س سے ایک خط س سے کھینچو جو ن ن پر عمود ہو اور ماسکے س کے متناظر مرتب سے پرے سے پرے، تب دفعہ ۱۳ کے مسئلہ کے عکس کی رو سے دونوں خط ن ن اور ن سے مخروطی کے تماس ہیں۔

پس ثابت ہوا کہ ماسکی وتر ن س ن کے سروں ن ن پر کے تماس ایک دوسرے سے مرتب پر ملتے ہیں۔

عکس۔ اگر مخروطی کے مرتب پر کے کسی نقطہ سے مخروطی کے تماس کھینچے جائیں تو نقاط تماس کو ملانے والا خط متناظر ماسکے میں سے گزرے گا۔

فرض کرو کہ مرتب پر کے کسی نقطہ سے مخروطی کے تماس سے ن اور سے ن ہیں۔ ثابت کرنا ہے کہ ن س ن خط مستقیم ہے۔

چونکہ ن سے مخروطی کا تماس ہے اس لیے زاویہ ن س سے قائم ہے، اسی طرح سے

زاویہ ن س سے بھی قائم ہے۔ اس لیے متصلہ زاویوں ن س سے

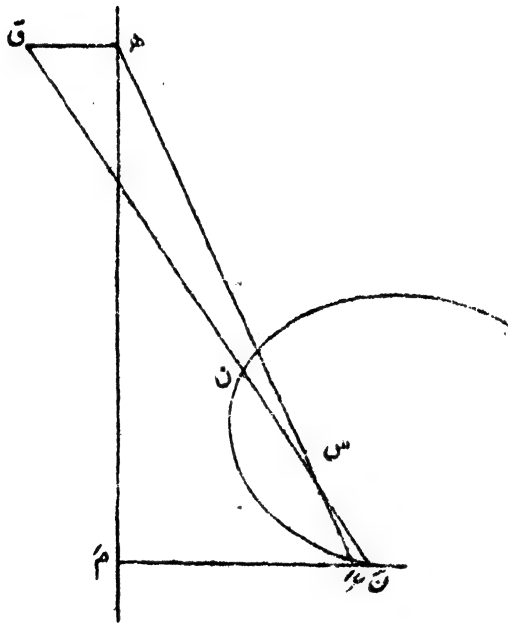
اور ن س سے کا مجموعہ دو قائمے ہے اس لیے ن س ن خط مستقیم ہے۔

۱۵۔ مسئلہ۔ اگر مخروطی کے نقطہ ن پر کے تماس پر کوئی

پس ثابت ہوا کہ اگر ق بیرونی نقطہ ہو تو $\frac{س ق}{ق ہ} < ز$

صورت دوم۔ فرض کرو کہ س اور ق مرتب کی مخالف جانبوں پر واقع ہیں۔
فرض کرو کہ محدود خط س ق محزومی کو نقطہ ن پر اور س ق
محدودہ محزومی کو ن پر قطع کرتا ہے۔

ن سے مرتب پر نمود ن م نکالو اور فرض کرو کہ ہ س محدودہ ن م
کو ن اور م کے درمیانی نقطہ ع پر قطع کرتا ہے۔



تب متغایہ مثلثات سے

$$\frac{س ق}{ق ہ} = \frac{س ن}{ن ع}$$

اور چونکہ $\frac{س ن}{ن ع} < \frac{س ن}{ن م} = ز$

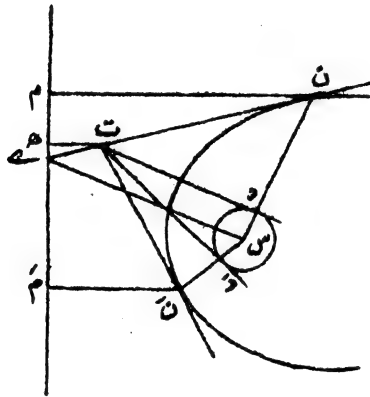
اس لیے $\frac{س ق}{ق ھ} < ز$

اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر نقطہ ق مخروطی کے اندر

ہو تو $\frac{س ق}{ق ھ} > ز$

۱۷۔ مسئلہ عملی۔ کسی بیرونی نقطہ سے مخروطی کے ماسات کھینچنا۔
فرض کرو کہ ت ایک دیا ہوا بیرونی نقطہ ہے جس سے مخروطی کے
ماس کھینچنا مطلوب ہے۔

تحلیل :- فرض کرو کہ ت سے مخروطی کے ماس ت ن اور ت ن
ہیں۔ فرض کرو کہ مخروطی کا ماسک س ہے اور تناظر مرتب م م ہے۔



ت سے مرتب پر عمود ت ھ اور س ن، س ن پر بالترتیب عمود ت د
ت د نکالو تب دفعہ ھا کی رو سے

$$ز = \frac{س د}{ت ھ} \text{ اور } ز = \frac{س د}{ت ھ}$$

اس لیے س د = س د = ز × ت ھ۔

چونکہ $ز$ اور $ت$ دونوں معلوم ہیں اس لیے $س$ معلوم ہو سکتا ہے۔
 چونکہ $د$ اور $د پر$ کے زاویے قائمے ہیں اس لیے $ت$ اور $د$ ماسات
 ہیں اس دائرہ کے جس کا مرکز $س$ ہے اور نصف قطر $س د$ ہے جہاں
 $س د = ز \times ت$ ہ۔

پس تحلیل بالاکا بنا پر بیرونی نقطہ سے مخروطی کے دو ماس کھینچے کا حسیل
 عمل حاصل ہوتا ہے۔

ترکیب - دیے ہوئے نقطہ $ت$ سے مخروطی کے مرتب پر عمود
 $ت$ نکالو اور متناظر ماسکے $س$ کو مرکز مان کر $ز \times ت$ کی دوری پر دائرہ
 کھینچو۔ دفعہ ۱۶ کی رو سے ظاہر ہے کہ نقطہ $ت$ اس دائرہ کے باہر ہوگا۔
 $ت$ سے اس دائرہ کے ماس $ت د$ اور $ت د$ کھینچو۔

$س د$ اور مخروطی کا نقطہ تقاطع $ن$ اور $س د$ اور مخروطی کا نقطہ تقاطع $ن$
 معلوم کرو۔ جب $ت ن$ اور $ت ن$ مخروطی کے مطلوبہ ماس ہوں گے۔
 فرض کرو کہ $ن$ $ت$ مرتب سے $س$ پر ملتا ہے، $س$ سے $س$ کو ملاؤ۔
 متغایر مثلثات $س ت$ اور $س ن$ سے

$$(۱) \quad \frac{س ت}{س ن} = \frac{ت د}{ن د} \dots\dots\dots (۱)$$

چونکہ $ن$ مخروطی پر کا نقطہ ہے اس لیے $\frac{س ن}{ن د} = ز$ (۲)

نیز بموجب عمل دائرہ (س) کا نصف قطر $س د = ز \times ت$ ہ (۳)

$$(۲) \text{ اور } (۳) \text{ سے } \frac{س ت}{س ن} = \frac{س د}{ز} \div \frac{س ن}{ز} = \frac{س د}{س ن} \dots\dots\dots (۴)$$

$$(۱) \text{ اور } (۴) \text{ سے } \frac{س ت}{س ن} = \frac{س د}{س ن} \dots\dots\dots$$

اس لیے $س ت // د ت$

چونکہ $س د$ قائمہ ہے اس لیے $د س$ بھی

ت سے سن اور سن پر عمود داورت دکالو۔
تہہ دفعہ ہاکی روستے سے د = ز × ت ہ اور س د = ز × ت ہ
یعنی س د = س د

اب مثلثات میں د اور ت میں د میں

دس = دس دس (کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے)

ضلع س د = ضلع س د اور وتر س ت دونوں مثلثات میں مشترک ہے

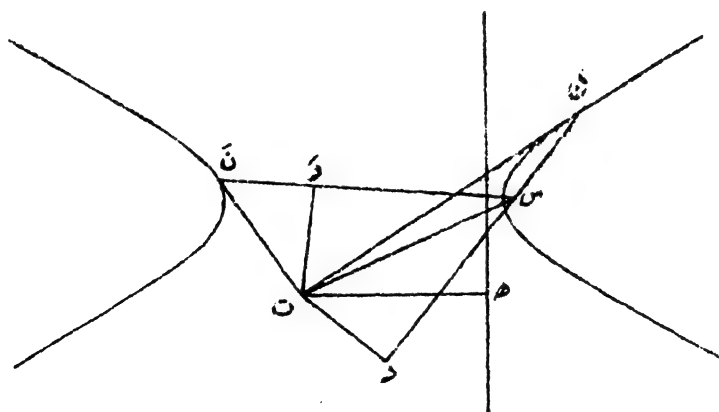
اس لیے مثلث ت س د \equiv مثلث ت س د

اس لیے اگر نقاط تماس ن اور م مخروطی کی ایک ہی شاخ پر ہوں (دیکھیں شکل ۵۱۱۱)

تو \geq ت م ن $=$ \geq ت س ن

اور اگر نقاط تماس ن اورن مخروطی (زائد) کی مختلف شاخوں پر ہوں
(دیکھو شکل ۷۷ ذیل)

نو کے ت س د + ت س ن = دو قاعے



شکل ۱۰

لیکن \triangleright ت س د = \triangleleft ت س د

اس لیے \angle ت س ن + \angle ت س ن = دو قانے
یعنی زاویے ت س ن اور ت س ن ایک دوسرے کے مکمل ہیں۔
اُس صورت میں جبکہ دونوں نقاط تماس ن اور ن زائد کی اُس شاخ پر
واقع ہوں جس کے اندر ماسکہ س نہیں ہے مناسب شکل کھینچ کر بہ آسانی ثابت
کیا جاسکتا ہے کہ \angle ت س ن = \angle ت س ن
پس ثابت ہوا کہ بیرونی نقطہ ت سے کھینچے ہوئے مماسات کے محاذی
ماسکہ س پر مساوی زاویے بنتے ہیں جبکہ دونوں نقاط تماس مخروطی کی ایک ہی
شاخ پر ہوں اور مکمل زاویے بنتے ہیں جبکہ نقاط تماس مخروطی (زائد) کی
مختلف شاخوں پر واقع ہوں۔
فروع۔ اگر مخروطی کے دو نقطوں ن اور ن پر کے مماسات کا نقطہ تقاطع
ت ہو اور وتر ن ن مخروطی کے ایک مرتب سے ک پر ملے تو ت ک کے
محاذی متناظر ماسکہ س پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔
دفعات ۱۱ اور ۱۸ سے ظاہر ہے کہ س ک، س ت زاویہ ن س ن
کے منصف ہیں اس لیے س ک اور س ت کا درمیانی زاویہ قائمہ ہے۔

مثلاً

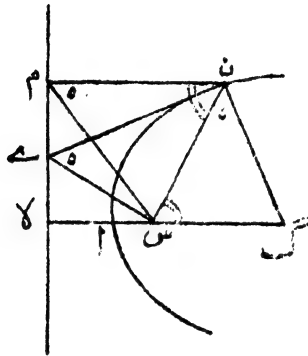
- (۱) مخروطی کا ایک مرتب اور مخروطی کے ایک دیے ہوئے نقطہ پر کا
ماس معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ متناظر ماسکہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔
- (۲) مخروطی کا ایک ماسکہ، مخروطی پر گئے دو نقطے اور ان نقطوں میں
ایک نقطہ پر کا ماس دیے گئے ہیں۔ متناظر مرتب معلوم کرو۔
- (۳) مخروطی کا ایک مرتب، مخروطی پر گئے دو نقطے اور ان نقطوں میں
ایک پر کا ماس دیے گئے ہیں، متناظر ماسکہ معلوم کرو۔
- (۴) مخروطی کھینچو جبکہ مخروطی کا ایک ماسکہ، خروج المرکز اور مخروطی کے
دیے ہوئے نقطہ پر کا ماس معلوم ہیں۔

(۵) مخروطی کا کوئی ماسک ماسک میں سے گزرنے والے کسی وتر کے
سروں پر کے ماسکوں سے ف فم پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف ف کے محاذی
مخروطی کے ماسک میں پرنایا وی قائمہ بنتا ہے۔

(۶) مخروطی کا کوئی ماس مخروطی کے دو ثابت ماسوں سے نقاط ف ف پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ف ف کے محاذی ماس کے پر مستقل زاویہ بنتا ہے۔

(۷) ایک ذواربجۃ الاضلاع کے ضلع ناقص کو مس کرتے ہیں ثابت کرو ذواربجۃ الاضلاع کے مقابل کے ضلعوں کے کسی جوڑے کے محاذی ماس کے پر مکمل زاویہ بنتے ہیں۔

۱۹۔ اگر مخروطی کے کسی نقطہ ن پر کا عماد قاطع محور سے گ پر ملے تو
 سن گ = ز × سن ن



فرض کرو کہ مخروطی کے نقطہ ن پر کا ماس ماسکہ مں کے جواب کے مرتب سے نقطہ مے پر ملتا ہے ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو۔ مں مے مں م کو ملاؤ۔

چونکہ $\angle ن س م = \angle قائم = \angle ن م م$ ہے
اس لیے نقاط س، ن، م، اُس دائرہ پر ہیں جس کا قطر ن م ہے

نیز چونکہ \angle عے ن گ قائمہ ہے اس لیے ن گ اس دائرہ کا مماس ہے۔

∴ \angle گ ن س = \angle س م ن
اور چونکہ س گ متوازی ہے ن م کے

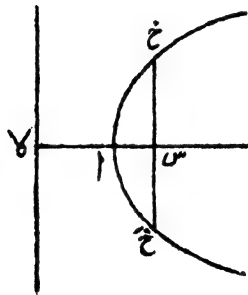
∴ \angle گ س ن = \angle س ن م

∴ مثلثات گ ن س اور س م ن متشابه ہیں

$$\therefore \frac{\text{س گ}}{\text{س ن}} = \frac{\text{س ن}}{\text{ن م}} = \text{ز}$$

$$\therefore \text{س گ} = \text{ز} \times \text{س ن}$$

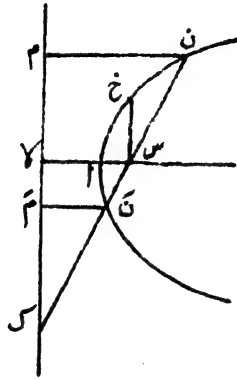
۴۰۔ **تشریف:** - اگر مخروطی کے ماسکے س میں سے گزرنے والا ماسکی وتر خ س خ قاطع محور پر عمود وار ہو تو خ خ کو مخروطی کا وتر خاص کہتے ہیں۔ اور نیم وتر خاص س خ کے طول کو ل سے تعبیر کرتے ہیں۔



مسئلہ - اگر مخروطی کے ماسکی وتر ن س ن کے سرے مخروطی کی ایک ہی شاخ پر ہوں تو

$$(1) \quad \frac{2}{ل} = \frac{1}{س ن} + \frac{1}{س ن}$$

اور (۲) $س ن \times س ن = ل \times ل$ $ن ن$



فرض کرو کہ ماسکی وتر ن س ن مودودہ متناظر مرتب سے ک پر ملتا ہے
ن م اور ن م متناظر مرتب پر عمود نکالو۔

$$(۱) \frac{س ن}{س ن} = \frac{ز \times ن م}{ز \times ن م} \text{ (بموجب تعریف مخروطی)}$$

$$= \frac{ن م}{ک ن} = \frac{ک ن}{ک ن} \text{ (مشابہ مثلثات سے)}$$

اس لیے ن ن کی داخلی تقسیم س پر اور خارجی تقسیم ک پر ایک ہی نسبت میں
ہوتی ہے۔ یعنی ن ن کی موسیقی تقسیم س اور ک پر ہوتی ہے۔

اس لیے ک س کی موسیقی تقسیم ن اور ن پر ہوتی ہے۔

اس لیے ک ن، ک س، ک ن موسیقی سلسلہ میں ہیں۔

اس لیے تناسب سے ن م، س لا اور ن م موسیقی سلسلہ میں ہیں۔

∴ ز × ن م، ز × س لا، ز × ن م بھی موسیقی سلسلہ میں ہیں۔

∴ س ن، س خ، س ن موسیقی سلسلہ میں ہیں۔

$$\therefore \frac{۲}{ل} = \frac{۲}{س خ} = \frac{۱}{س ن} + \frac{۱}{س ن}$$

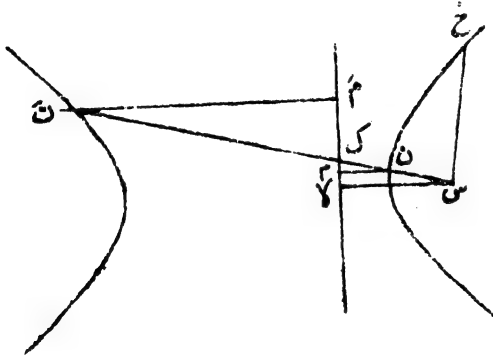
$$\frac{\text{ن ن}}{\text{س ن} \times \text{س ن}} = \frac{\text{س ن} + \text{ن ن}}{\text{س ن} \times \text{س ن}} = \frac{1}{\text{س ن}} + \frac{1}{\text{س ن}} \quad (۲)$$

$$\frac{۲}{ل} = \frac{1}{\text{س ن}} + \frac{1}{\text{س ن}} \quad \text{لیکن (۱) کی رو سے}$$

$$\frac{۲}{ل} = \frac{\text{ن ن}}{\text{س ن} \times \text{س ن}} \quad \therefore$$

$$\text{یعنی } \text{س ن} \times \text{س ن} = \text{ن ن} \times \frac{ل}{۲}$$

نوٹ - اگر زائد کی صورت میں ماسکی وتر کے سرے ن اور ن مختلف شاخوں پر ہوں (دیکھو شکل ذیل)



$$\frac{۲}{ل} = \frac{1}{\text{س ن}} - \frac{1}{\text{س ن}} \quad (۱) \quad \text{تو}$$

اور (۲) $\text{س ن} \times \text{س ن} = \text{ن ن} \times \frac{ل}{۲}$ حسب سابق ثابت کیا جاسکتا ہے کہ س ک کی موسیقی تقسیم 'ن' پر ہوتی ہے۔

اس لیے دی ہوئی شکل کی مدد سے مطلوبہ نتیجہ بہ آسانی حاصل ہو سکتا ہے۔

مرتب پر کوئی نقطہ م' لو' م' س اور م' کو ملاؤ اور ان خطوط کو خارج کرو۔ س میں ایک خط س ن ایسا کھینچو جو م' س کے ساتھ \angle لا س م' کے مساوی زاویہ بنائے اور فرض کرو کہ یہ خط م' ا' محدودہ سے ن پر ملتا ہے، تب نقطہ ن مخروٹی پر ہوگا۔

ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو اور فرض کرو کہ م ن محدودہ م' س محدودہ سے ق پر ملتا ہے۔

متوازی خطوط ق م، س لا سے حاصل ہوتا ہے

$$\angle لا س م' = \angle ن ق س$$

لیکن بموجب عمل $\angle لا س م' = \angle ن س ق$

$$\therefore \angle ن ق س = \angle ن س ق$$

$$\therefore ن ق = ن س \dots\dots (۱)$$

$$\text{نیز متشابه مثلثات سے } \frac{ن ق}{ا س} = \frac{م' ن}{ا م'} = \frac{ن م'}{ا م'}$$

$$\text{اس لیے (۱) کی مدد سے } \frac{س ن}{ا س} = \frac{ن م'}{ا م'}$$

$$\text{یعنی } \frac{س ن}{ن م'} = \frac{ا س}{ا م'} = ز$$

یعنی ن مخروٹی پر کا نقطہ ہے۔

(۶) مخروٹی کے کسی نقطہ ن پر کا محاس مرتب سے ہے

ملتا ہے اور وتر خاص سے ع پر ملتا ہے ثابت کرو کہ $\frac{س ع}{س ق} = ز$

(۷) مخروٹی کا کوئی وتر ن ایک مرتب سے ک پر ملتا ہے اور

ک میں سے مخروٹی کا ایک محاس ک ت کھینچا گیا ہے۔ ق کو دیے ہوئے

مرتب کے جواب کے اس کے س سے ملانے والا خط وتر ن سے ع پر

ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ن کی موسیقی تقسیم ع اور ک پر ہوتی ہے۔

(۸) ایک مخروٹی کا خروج المرکز ز اور مخروٹی پر کا ایک ثابت نقطہ

ن اور ن پر کے عماد اور قاطع محور کا نقطہ تقاطع گ معلوم ہیں۔ مخروطی کے ماسک کا طریق معلوم کرو۔

(۹) اگر مخروطی کے دو وترن ق اور ن ق مرتب سے ک اور ک پر ملیں اور متناظر ماسک سے ہو تو ثابت کرو کہ $\angle ک س ک' = \angle ن س ن'$ کے نصف کے مساوی ہے یا نصف کا مکمل۔

(۱۰) مخروطی پر کے دو نقطے مخروطی کا ماسک اور خروج المرکز معلوم ہیں مخروطی کے محور کا مقام معلوم کرو۔

(۱۱) اگر وتر خاص کے ایک سرے خ پر کا ماسک رأس ا پر کے ماسک سے ت پر ملے تو ثابت کرو کہ $ا ت = ا س$

(۱۲) مخروطی کا ایک ثابت نقطہ ن ہے اور ایک نقطہ ت سے ماسکی فاصلہ س ن پر عمود ت د اور متناظر مرتب پر عمود ت م نکالے گئے ہیں۔ اگر $\frac{س ت}{س د} = \frac{ز}{ت}$ ثابت کرو کہ ت کا طریق نقطہ ن پر کا ماسک ہے۔

(۱۳) مخروطی کے کسی نقطہ ن پر کا ماسک مرتب سے سے پر ملتا ہے اور وتر خاص محدود سے ت پر ثابت کرو کہ $\frac{س ت}{س د} = \frac{ز}{ا س}$ کی مدد سے ثابت کرو کہ اگر مخروطی کے کسی ماسکی وتر کے سروں پر کے ماسک وتر خاص محدود سے ت اور ت پر ملیں تو $س ت = س ت$

(۱۴) مخروطی کے مرتب پر کے ایک ثابت نقطہ ک سے ایک خط کھینچا گیا جو مخروطی کو ن اور ن پر قطع کرتا ہے اور ن اور ن پر کے ماسکات کا نقطہ تقاطع ت ہے، ثابت کرو کہ ت کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو متناظر ماسک س میں سے گزرتا ہے۔

(۱۵) مخروطی کے ماسک س میں سے گزرنے والے ایک ثابت خط پر کئی نقطہ ت ہے، ثابت کرو کہ ت سے کھینچے ہوئے ماسکات کا وتر ت ماس مرتب پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

(۱۶) مخروطی کے نقطہ ن پر کا عماد قاطع محور سے گ پر ملتا ہے اور گ سے س ن پر عمود گ ط ہے۔ ثابت کرو کہ ن ط نیم وتر خاص کے

مساوی ہے۔

(۱۷) مخروطی کے کسی نقطہ ن پر کا عماد قاطع محور سے گ پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا مرکز گ اور نصف قطر گ ن ہے س ن میں سے ایک مستقل طول والا وتر قطع کرتا ہے۔

(۱۸) مخروطی کے ماسکے س سے مخروطی کے کسی ماس پر عمود س ما نکالا گیا ہے اور متناظر مرتب پر عمود س لا ہے ثابت کرو کہ $\frac{س ما}{لا ما} = ز$ اور اس کی مدد سے ما کا طریق معلوم کرو۔

مکانی کی صورت میں یہ طریق کیا ہوگا۔

[اشارہ - فرض کرو کہ ن پر کا ماس مرتب سے سے پر ملتا ہے۔ ن سے مرتب پر عمود ن نکالو۔ تب $س ما لا = س لا = س ن م$ اور $س لا ما = س لا = س م ن$ اس لیے مثلثات س لا ما اور س م ن متشابه ہیں۔

$$اس لیے \frac{س ما}{لا ما} = \frac{س ن}{م ن} = ز$$

(۱۹) مخروطی کے نقطہ ن پر کا عماد قاطع محور سے گ پر ملتا ہے اور ن سے مرتب پر عمود ن م ہے۔ ثابت کرو کہ ن گ = ز × س م جہاں س متناظر ماسکے ہے۔ اس نتیجہ کی مدد سے مخروطی کے ایک دیے ہوئے نقطہ ن پر کا عماد کھینچو۔

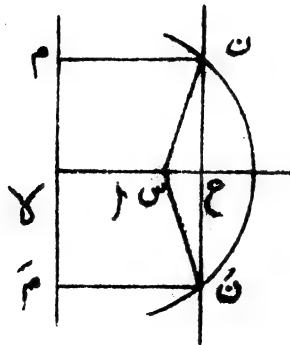
(۲۰) دو مخروطیوں کا ایک ماسکے س مشترک ہے۔ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں کا مشترک وتر س کے جواب کے مرتبوں کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

(۲۱) ایک مخروطی کا ماسکے مرتب اور خروج المرکز معلوم ہیں مخروطی کا وہ ماسکے کھینچو جو ایک دیے ہوئے خط کے متوازی ہے۔

دوسرا باب
مکافی

۲۱۔ تعریفات ————— سے ایک ثابت نقطہ اور م م ایک ثابت خط مستقیم ہے۔ اگر ان میں سے گزرنے والی سطح مستوی میں ایک نقطہ ن اس طرح حرکت کرے کہ س سے ن کا فاصلہ ن س، خط مستقیم م م سے ن کے عمودی فاصلہ ن م کے مساوی ہو تو ن کے طریق کو مکانی کہتے ہیں۔ ثابت نقطہ س کو مکانی کا ماسکہ کہتے ہیں۔ ثابت خط مستقیم م م کو مکانی کا مرتب کہتے ہیں۔

۲۲۔ مسئلہ۔ اگر مکانی کا ماسکہ س اور مرتب م م معلوم ہوں تو مکانی کو مرتسم کرنا یعنی مکانی پر کے متعدد نقطے معلوم کرنا۔



اسکے سے مرتب م م پر محمد سے لا نکار، سے لا کا وسطی نقطہ ۱

معلوم کرو۔

چونکہ $اس = ۱۷$ اس لیے بموجب تعریف نقطہ ۱ مکانی پر کا نقطہ ہے
 لا س پر کے کسی نقطہ ع سے مرتب کے متوازی خط ن ع ن کھینچو۔ اس کو مرکز
 مان کر ع کا نصف قطر والا دائرہ کھینچو جو ن ع ن کو ن اور ن پر قطع کرے۔ تب
 ن اور ن مکانی پر کے نقطے ہونگے۔

ن اور ن سے مرتب پر بالترتیب عمود ن م اور ن م نکالو۔

چونکہ ن س = ع لا = ن م اس لیے ن مکانی پر کا ایک نقطہ ہے۔
 اسی طرح ن بھی مکانی پر کا ایک نقطہ ہے۔

ظاہر ہے کہ دائرہ (س) خط ن ع ن کو صرف اُسی صورت میں
 قطع کریگا جبکہ دائرہ کا نصف قطر س ن بڑا ہو س ع سے یعنی جبکہ ع لا
 بڑا ہو س ع سے اور یہ صرف اُسی صورت میں ممکن ہوگا جبکہ نقطہ ع نقطہ ۱ سے
 اُسی طرف واقع ہو جس طرف ماسکہ س واقع ہے۔

لا س پر ع کے مختلف مقامات لے کر اسی عمل سے مکانی پر کے
 دیگر متعدد نقطے معلوم ہو سکتے ہیں اور مکانی مرقم ہو سکتا ہے۔ عمل بالا
 سے ضمناً یہ معلوم ہوتا ہے کہ ہر خط جو مرتب کے متوازی ہے اور ۱ کے اُسی جانب
 واقع ہے جس جانب ماسکہ س واقع ہے مکانی کو دو نقطوں پر قطع کرتا ہے۔
 اس لیے مکانی لا محدود فاصلہ تک ایک طرف پھیلتا ہے اور کلیہ راس ۱
 کی اُسی جانب واقع ہے جس جانب ماسکہ س ہے۔

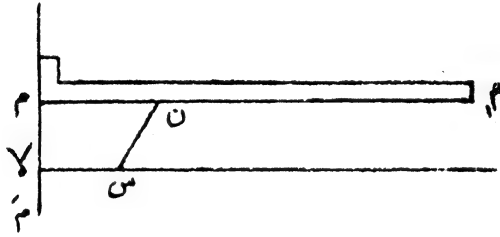
۲۳۔ چونکہ مساوی الساقین مثلث س ن ن کے قاعدہ ن ن پر س ح

عمود ہے۔ اس لیے ن ن کا وسطی نقطہ ع ہوگا۔ پس معلوم ہوا کہ مکانی کے
 ہر ایسے وتر ن ن کی جو مرتب کے متوازی ہے خط لا س (ممدودہ بشرط ضرورت)
 عمودی تنصیف کرتا ہے۔

تعریفات۔ اگر ایک منحنی کی سطح میں ایک خط ایسا ہو کہ یہ منحنی
 کے ہر ایسے وتر کی جو اس پر عمود وار ہو تنصیف کرتا ہو تو منحنی بجا خط مذکور کے
 متشاکل کہلاتا ہے، خط مذکور منحنی کا محور کہلاتا ہے۔

پس ذیل کا مسئلہ حاصل ہوا۔

مکانی بلحاظ خط س لا کے جو ماسکہ میں سے مرتب پر عموداً
 اکھینچا گیا ہے متشکل ہے یعنی خط لا س محدودہ مکانی کا محور ہے۔
 تعریف۔ محور اور منحنی کے نقطہ تقاطع کو رأس کہتے ہیں۔
 پس شکل میں س لا کا وسطی نقطہ ۱ مکانی کا رأس ہے۔
 ۲۴۔ مکانی کو جیلی طور پر ذیل کے طریقہ سے مرتسم کیا جاسکتا ہے۔
 فرض کرو کہ مکانی کا ماسکہ س اور مرتب م م دیے گئے ہیں۔



ایک سلاخ م م کے ایک سرے م کے ساتھ ایک بے لچک ڈوری کا ایک سرے
 باندھا گیا ہے جس کا طول م م کے مساوی ہے اور ڈوری کا دوسرا سرا
 ماسکہ س کے ساتھ باندھا گیا ہے۔ اب سلاخ کو اس طرح پھسلایا جاتا ہے کہ
 اس کا سرا م مرتب پر رہتا ہے اور سلاخ ہمیشہ مرتب پر عمود وار رہتی ہے۔
 ڈوری کو ایک پنسل کی نوک کے ذریعہ جو ہمیشہ سلاخ کو مس کرتی ہے تنہا ہوا
 رکھا جاتا ہے تب پنسل کی نوک مکانی کو مرتسم کریں جس کا ماسکہ س اور
 مرتب م م ہے۔

$$\text{کیونکہ } س ن + ن م = م م = م م + ن م$$

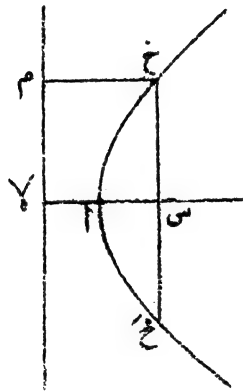
$$\therefore س ن = ن م$$

۴۵۔ تعریفات۔ اسکے س میں سے گزرنے والے کسی وترن س ن کو ماسکی دتر کہتے ہیں۔ اور ماسکے س سے منحنی پر کے کسی نقطہ ن کے فاصلہ ن س کو ن کا ماسکی فاصلہ کہتے ہیں۔

وہ ماسکی و نرجو محو پر عمود ہو و تر خاص کہتا ہے اور اس کے سروں کو
 بالعموم خاخ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ س خ کو نیم و تر خاص کہتے ہیں اور
 اس کے طول کو بالعموم ل سے تعبیر کرتے ہیں۔

اگر مغنی کے کسی نقطہ ن سے محور پر عمود ن ع ہوتو ن ع کو نقطہ ن کا معین کہتے ہیں اور معین کے پائین ع اور اُس کے درمیانی فاصلہ ن ع کو ن کا فاصلہ کہتے ہیں۔

مسئلہ - مکانی کا وتر خاص $\chi = 12$ م
 وتر خاص کے سرے χ سے مرتب پر عمود χ م نکالو۔



تب بموجب تعریف $س خ = خ م$
 $س ۱۲ = ۴ س$

چونکہ مکانی بلحاظ محور کاس کے متشاکل ہے

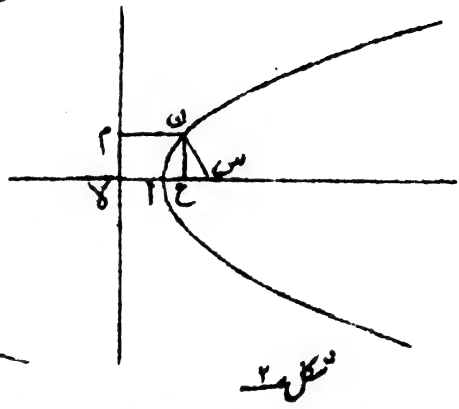
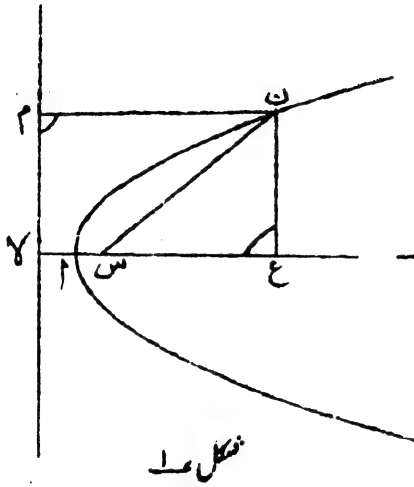
اس لیے $\chi = 2$ س χ

∴ $\chi\chi = \chi^2 = 1$ s

۳۶۔ مسئلہ۔ اگر مکانی پر کے کسی نقطہ ن کا معین ن ع ہو تو

$$ن ع' = ۱۲ س ۱ \times ع ۱$$

ن س کو طائو اور ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو



چونکہ س ن = ن م
اس لیے س ن' = ن م' = ۷ ع' (۱)

اور س ن' = ن ع' + ع س (۲)
اس لیے (۱) اور (۲) سے ن ع' = ۷ ع' - ع س

$$= (۷ ع' - ع س) (ع س + ۷ ع)$$

اب شکل ۱ میں ۷ ع - ع س = ۱۲ س ۱ = ۷ ع

اور ۷ ع + ع س = ۷ ع + ع س + ع س

$$= ۱۲ س ۱ + ۲ ع س$$

$$= ۱۲ ع$$

اور شکل ۲ میں (۷ ع - ع س) = ۷ ع - ع س - ع س

$$= ۱۲ س ۱ - ۲ ع س$$

$$ع ۱۲ =$$

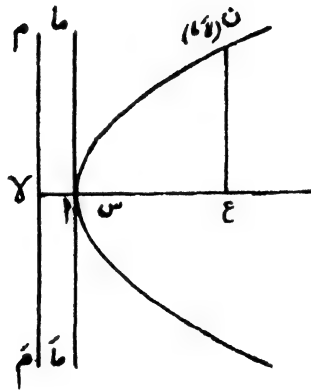
$$\text{اور } لا ع + س ع = لا س = س ۱۲$$

اس لیے دونوں صورتوں میں $ع ۱۲ = س ۱۲$ اور $ع ۱۲ = لا س$

نوٹ (۱) رشتہ $ع ۱۲ = س ۱۲$ سے ظاہر ہے کہ جوں جوں $ع$

بڑھتا ہے $ع$ ن بھی بڑھتا ہے۔ پس معلوم ہوتا ہے کہ مکافی بند منحنی نہیں ہے۔

نوٹ (۲) مکافی کے رأس ۱ میں سے محور پر عمود دار ایک خط $ما ۱$ کھینچو۔



اب مکافی کے محور $۱ س$ (ممدودہ) اور خط $ما ۱$ کو بالترتیب حوالہ کے

لا محور اور ما محور مانو۔

فرض کرو کہ مکافی کے کسی نقطہ $ن$ کے ممدود (لا، ما) ہیں،

$$\text{تب } ۱ ع = لا \text{ اور } ع ن = ما$$

میزر رأس کے ماسکی فاصلہ $۱ س$ کو اسے تعبیر کرو تب اوپر کے

نتیجہ $ع ن = س ۱۲$ اور $ع ۱۲ = لا س$ کی شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$ما = س ۱۲$$

چونکہ مکافی پر کے کسی نقطہ $ن$ کے ممدود (لا، ما) اس رشتہ کو پورا کرتے

ہیں اس لیے یہ رشتہ $ما = س ۱۲$ ولا مکافی کی مساوات ہے۔

عکس۔ اگر ایک نقطہ دو علی القوائم متقاطع خطوط کی سطح میں اس طرح

حرکت کرے کہ ایک خط سے اُس کے عمودی فاصلہ کا مربع ایسے بدلے جیسے دوسرے خط سے اس نقطہ کا عمودی فاصلہ تو متحرک نقطہ ایک مکانی مرتبہ کرے گا جس کا محور پہلا خط ہے اور جس کا رأس دیے ہوئے خطوط کا نقطہ تقاطع ہے۔

امثلہ

نوٹ۔ امثلہ میں جہاں کہیں حروف کی تشریح نہیں کی گئی ان کا مفہوم ہمیشہ وہی لیا جائے جو سابقہ اشکال میں بتایا گیا ہے۔

(۱) ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ اور ایک ثابت خط مستقیم سے اس کے فاصلوں کا فرق مستقل ہے۔ ثابت کر دو کہ نقطہ کا طریق ایک مکانی ہے۔

(۲) مکانی کا ماسکہ m ہے اور مرتبہ m ہے۔ m کوئی خط ہے جو مکانی کے مرتبہ پر عمود وار ہے۔ m کا عمودی ناصف m سے n پر ملتا ہے۔ ثابت کر دو کہ n مکانی پر کا نقطہ ہے۔

(۳) مکانی کا ماسکہ اور مکانی پر کے دو نقطے معلوم ہیں۔ مکانی کا مرتبہ محور اور اس معلوم کرو۔

(۴) ثابت کرو کہ محور کے متوازی کوئی خط مکانی کو ایک اور صرف ایک نقطہ پر کا ملتا ہے۔

(۵) مکانی پر دو نقطے n اور n' اس طرح واقع ہیں کہ $n = n'$ ثابت کر دو کہ n اور n' مکانی کے محور کے ساتھ مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بناتے ہیں اور مکانی کا محور n کی عمودی تنصیف کرتا ہے۔

(۶) مکانی کے کسی نقطہ n سے مرتبہ پر عمود n ہے اور خط m اس خط سے جو رأس n میں سے محور پر عمود وار کھینچا جائے نقطہ m پر ملتا ہے ثابت کر دو کہ m کا وسطی نقطہ m ہے اور n کا عمود ہے m پر اور n کی تنصیف کرتا ہے۔

(۷) مکانی پر کوئی نقطہ n ہے اور n مرتبہ پر عمود ہے m میں سے

خط میں م کھینچا گیا ہے جو م ن پر عمود وار ہے اور مرتب سے سے پر ملتا ہے
ثابت کرو کہ ن سے زاویہ م ن م کا نصف ہے۔

(۸) ن س ن مکانی کا کوئی ماسکی وتر ہے اور ن م مرتب
پر عمود ہیں۔ ثابت کرو کہ $\angle م س م$ قائمہ ہے۔

(۹) ثابت کرو کہ کسی ماسکی وتر کے قطر پر جو دائرہ کھینچا جائے وہ مرتب
کو مس کرتا ہے۔

(۱۰) ایک دائرہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے اور ایک ثابت خط
کو مس کرتا ہے ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق ایک مکانی ہے۔

(۱۱) ایک دائرہ ایک ثابت خط مستقیم کو اور ایک ثابت دائرہ کو مس
کرتا ہے ثابت کرو کہ اس کے مرکز کا طریق ایک مکانی ہے۔

(۱۲) مکانی کا مرتب اور مکانی پر کا ایک نقطہ معلوم ہیں، ماسکہ کا طریق
معلوم کرو۔

(۱۳) مکانی پر کے دو نقطے اور مکانی کا مرتب معلوم ہیں۔ مکانی کا ماسکہ
معلوم کرو۔ اس سوال کے کتنے حل ہیں؟

(۱۴) ثابت کرو کہ مکانی کے رأس ۲ اور وتر خاص کے سروں خ خ
میں سے گزرنے والے دائرہ کا نصف قطر $\frac{5}{8} \times \text{خ خ}$ ہے۔

(۱۵) مکانی پر کے کسی نقطہ ن سے ۱ پر عمود ن ل کھینچا گیا ہے
جو محور سے ل پر ملتا ہے ثابت کرو کہ ع ل کا طول ہمیشہ وتر خاص کے مساوی ہوگا۔

(۱۶) ثابت کرو کہ رأس ۱ سے مثلث س ن ع کے عاقل دائرہ کے ماس
کا طول $\frac{1}{4} \text{ ن ع}$ ہے۔

(۱۷) رأس ۱ کو مرکز ان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جس کا نصف قطر
 $\frac{3}{4} \text{ م س}$ ہے ثابت کرو کہ اس دائرہ اور مکانی کا وتر مشترک ۱ م کی عمودی تنصیف
کرتا ہے۔

(۱۸) مکانی کا کوئی ماسکی وتر ن س ن مرتب سے ک پر ملتا ہے۔
ثابت کرو کہ ن س ن کے ایک بیستی صفت ہے۔

(۱۹) ن س ن مکافی کا کوئی ماسکی وتر ہے۔ اور ن ع' ن ع' محور پر عمود ہیں۔ سوال ۱۸ کی مدد سے ثابت کرو کہ $ع ۲ \times ع ۱ = س ۲$ (۲۰) مندرجہ بالا سوال ۱۹ میں ثابت کرو کہ ع ن اور ع' ن کا ہندسی اوسط نیم وتر خاص ہے۔

(۲۱) مکافی کا محور، ماسکہ اور مکافی پر کا ایک نقطہ معلوم ہیں مرتب معلوم کرو۔

(۲۲) مکافی پر کے کوئی دو نقطے ن اور ن' ہیں اور ن ن' کے قطر پر دائرہ کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ یہ دائرہ یا تو مرتب کو مس کرے گا یا قطع ہی نہیں کرے گا اور س کرنے کی صورت میں وتر ن ن' ماسکہ میں سے گزرے گا۔

(۲۳) مکافی پر کا کوئی نقطہ ن ہے ثابت کرو کہ ع ن کے وسطی نقطہ ق کا طریق ایک مکافی ہے۔

(۲۴) مکافی پر کے کسی نقطہ ن کا معین ن ع ہے۔ اگر $ع ۱ = ع ۲$ تو ثابت کرو کہ ہر ایک کا طول وتر خاص کے مساوی ہے۔

(۲۵) مکافی پر کے کسی نقطہ ن سے مرتب پر عمود ن م ہے اور ن م کا وسطی نقطہ ق ہے۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک مکافی ہے جس کا راس ۱ کا وسطی نقطہ ہے۔

۲۶۔ مسئلہ۔ اگر مکافی کے دو نقطوں ن، ن' کو ملانے والا خط مرتب سے ک پر ملے اور مکافی کا ماسکہ س ہو تو س ک خطوط س ن، س ن' کے درمیانی زاویہ کا خارجی ناصف ہوگا۔

س ن، س ن' اور س ک کو ملاؤ۔

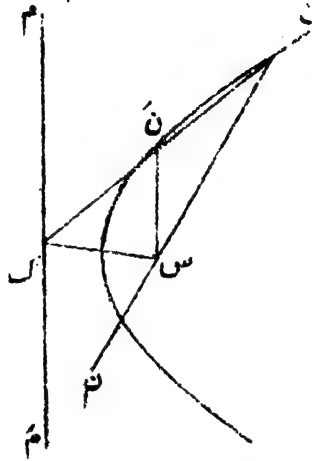
ن م اور ن' م مرتب پر عمود نکالو۔

تب متشابہ مثلثات ک ن م اور ک ن' م سے حاصل ہوتا ہے

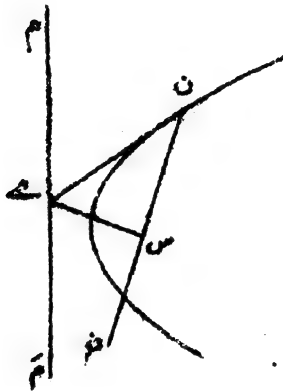
$$\frac{ک ن}{ک ن'} = \frac{ن م}{ن' م}$$

$$= \frac{س ن}{س ن'} \quad (\text{بحسب مکافی کی تعریف کے})$$

ن س کو کسی نقطہ ن تک خارج کرو۔



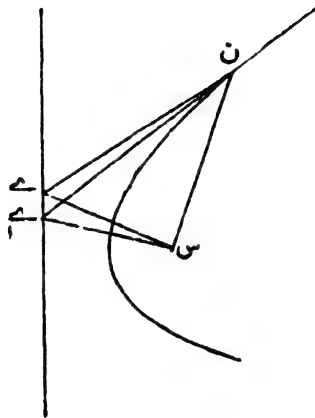
تب دفعہ ۲۷ کی رُو سے
س ک \geq ن س ن کا خارجی ناصف ہوگا۔



فرض کرو کہ نقطہ ن منحنی پر حرکت کر کے ن کے بے حد قریب آجاتا ہے اور
بالآخر ن پر منطبق ہو جاتا ہے، تب وتر ن ن کا انتہائی مقام نقطہ ن پر کاٹا

ہوگا اور نقطہ ک نقطہ سے پر منطبق ہو جائیگا۔ چونکہ N اور N' ایک دوسرے پر منطبق ہیں اس لیے N سے N' معدوم ہو جاتا ہے۔ اس لیے زاویہ N سے N' دو قوائم کے مساوی ہو جاتا ہے اور چونکہ N سے N' ناصف ہے N سے N' کا اس لیے N سے قائمہ ہے۔

عکس۔ اگر مکافی پر کوئی نقطہ N ہو اور ماسک سے N پر عمود N سے کھینچا جائے جو مرتب سے N سے پر ملے تو N سے مکافی کے نقطہ N پر کا عکس ہوگا۔

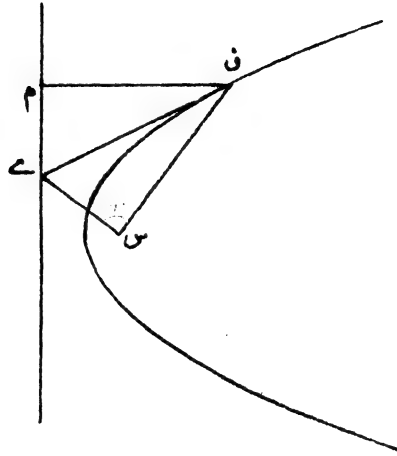


اگر N سے مکافی کا ماس نہیں ہے تو فرض کرو کہ N پر کا ماس مرتب سے N پر ملتا ہے۔ تب N سے N' قائمہ ہے۔ نیز بموجب مفروض N سے N' بھی قائمہ ہے۔ اس لیے خطوط N سے اور N سے ایک دوسرے پر منطبق ہیں یعنی نقاط N سے اور N سے ایک دوسرے پر منطبق ہیں۔ اس لیے N سے مکافی کے نقطہ N پر کا ماس ہے۔

نوٹ :- اگر مکافی کا ماسک N سے اور مرتب N سے معلوم ہوں تو مسئلہ بالا کے عکس کی مدد سے مکافی کے کسی نقطہ N پر کا ماس کھینچ سکتا ہے۔

۲۹۔ مسئلہ۔ مکافی کے کسی نقطہ N پر کا ماس N سے

مرتب پر کے عمود $ن م$ اور $ن$ کے ماسکی فاصلہ $ن س$ کے درمیانی زاویہ $س ن م$ کی تنصیف کرتا ہے۔



فرض کرو کہ مکانی کے نقطہ $ن$ پر کا ماس مرتب سے $س$ پر ملتا ہے
 $س$ سے کو ملاؤ۔

دفعہ ۲۸ کے مسئلہ کی رُو سے $ن س > س ع$ قائم ہے۔
 قائم الزاویہ مثلثوں $ن م س$ اور $ن س ع$ میں وتر $ن ع$ مشترک ہے اور
 $ضلع ن م = ضلع ن س$

اس لیے مثلثات $ن م س$ اور $ن س ع$ آپس میں
 ہر طرح سے مساوی ہیں۔

اس لیے $م ن ع = س ن ع$

یعنی ماس $ن$ سے زاویہ $م ن س$ کا داخلی ناصف ہے۔
 عکس۔ اگر مکانی کے کسی نقطہ $ن$ سے مرتب پر عمود $ن م$ ہو تو
 زاویہ $س ن م$ کا اندرونی ناصف مکانی کے نقطہ $ن$ پر کا ماس ہوگا۔
 فرض کرو کہ $س ن ع > س ن م$ کا ناصف $ن ع$ مرتب سے

ے پر ملتا ہے -

س ے کو ملاؤ -

تب مثلثات ن م ے اور ن م ے میں $\text{ن س} = \text{ن م}$
 ن م ے مشترک ہے

اور $\text{ن م ے} = \text{ن م ے}$

اس لیے مثلثات ن م ے اور ن م ے آپس میں ہر طرح سے
 مساوی ہیں -

اس لیے $\text{ن م ے} = \text{ن م ے}$ قائمہ

اس لیے دفعہ ۲۸ کے مسئلہ کے عکس کی جگہ ن م ے مکانی کا
 ماس ہے -

فرض (۱) مسئلہ بالا کی شکل میں $\text{م ے} = \text{م م}$

اور $\text{ن م ے} = \text{ن م ے}$

فرض (۲) مکانی کے رأس ۱ پر کا ماس محور پر عمود ہوتا ہے -

معمولی ترقیم کے مطابق چونکہ ۱ کا عمود ہے مرتب پر
 اس لیے مسئلہ بالا کی جگہ ۱ پر کا ماس ن م ے میں ۱ کا
 تنصیف کرتا ہے - لیکن $\text{ن م ے} = ۲$ قائمہ
 اس لیے ۱ پر کا ماس ۱ میں پر عمود ہے -

امثلہ

(۱) مکانی کے نقطہ ن سے مرتب پر عمود ن م ہے، ثابت کرو کہ

ن پر کا ماس خط ن م کی عمودی تنصیف کرتا ہے -

(۲) مکانی کے نقطہ ن سے مرتب پر عمود ن م ہے اور ن م عمود

مرتب سے ک پر ملتا ہے - ثابت کرو کہ ن م میں ک قائمہ ہے -

(۳) ن م مکانی کا ایک ماسکی وتر ہے - ن م عمودہ مرتب

سے ک پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ N ک مکانی کے محور کے متوازی ہے۔
 (۴) اگر دو مکایوں کا مرتب مشترک ہو تو ثابت کرو کہ ان مکایوں کے مشترک نقاط کو ملانے والا خط ان کے ماسکوں کو ملانے والے خط کی عمودی تنصیف کرتا ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ وتر خاص XX کے سرور پر کے ماسات کا نقطہ تقاطع LA ہے۔

(۶) متعدد مکایوں کے مرتب اور محور مشترک ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مکایوں میں سے ہر ایک دو ثابت علی القوائم خطوط کو مس کرتا ہے۔

(۷) ایک مکانی کا ماسک S ہے اور مرتب M پر کوئی نقطہ E M کے درمیان واقع ہے، ثابت کرو کہ زاویوں M سے S اور M سے S کے اندرونی ناصف مکانی کو مس کرتے ہیں۔

(۸) دو مکایوں کا ایک ہی مرتب ہے اور ان کے ماسک S اور S ہیں، ثابت کرو کہ ان مکایوں کے مشترک ماسات مرتب اور S کے نقطہ تقاطع پر ایک دوسرے کو عمود وار قطع کرتے ہیں۔

(۹) N اور N مکانی پر کے دو ثابت نقطہ ہیں اور Q منحنی پر ایک متغیر نقطہ ہے۔ NQ اور NQ مرتب سے بالترتیب K اور K پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ K سے K مستقل ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ کوئی خط مستقیم مکانی کو دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کر سکتا۔

(۱۱) اگر نقطہ N پر کے ماس پر کوئی نقطہ T ہو تو ثابت کرو کہ T سے T جہاں N مرتب پر عمود ہے۔

(۱۲) نقاط N اور N پر کے ماسات کا نقطہ تقاطع T ہے اور

N اور N مرتب پر عمود ہیں۔ ثابت کرو کہ T سے T سے T سے

(۱۳) ثابت کرو کہ مکانی کے کسی نقطہ پر کا ماس وتر خاص

محدودہ اور مرتب سے دو ایسے نقطوں پر ملتا ہے جو ماسک سے متساوی انصاف ہیں۔

(۱۴) مکانی پر کوئی نقطہ N ہے اور N ع عمود ہے محور پر۔ E ن
محدودہ وتر خاص کے سرے X پر کے M سے T پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ
 $S N = E T$

(۱۵) اگر ایک کتاب کے ورق کو اس طرح تہ کیا جائے کہ ایک کونہ
مقابل کے ضلع پر رہے تو ثابت کرو کہ شکن ہمیشہ ایک مکانی کو مس کرے گی۔
(۱۶) مکانی کا مرتب اور ایک دیے ہوئے نقطہ پر کا M سے
معلوم ہیں۔ ماسک معلوم کرو۔

(۱۷) مکانی کا مرتب اور مکانی کے دو M سے معلوم ہیں۔ ماسک معلوم کرو۔

(۱۸) اگر تین مکانیوں کا ایک ہی مرتب ہو تو ثابت کرو کہ ان میں

سے دو دو کے تین مشترک وتر ان مکانیوں کے ماسکوں سے بننے والے مثلث کے
حاطہ مرکز میں سے گزرتے ہیں۔

(۱۹) ثابت کرو کہ روشنی کی ایک شعاع جو مکانی کے محور کے متوازی ہے

مکانی پر منعکس ہونے کے بعد مکانی کے ماسک میں سے گزرتی ہے۔

۳۰۔ ترقیم۔ نقطہ N پر کے M اور محور کے نقطہ تقاطع

کو بالعموم T سے اور N پر کے عماد اور محور کے نقطہ تقاطع کو بالعموم G سے
تعبیر کیا جاتا ہے۔

مسئلہ۔ اگر مکانی کے کسی نقطہ N پر کے M اور عماد

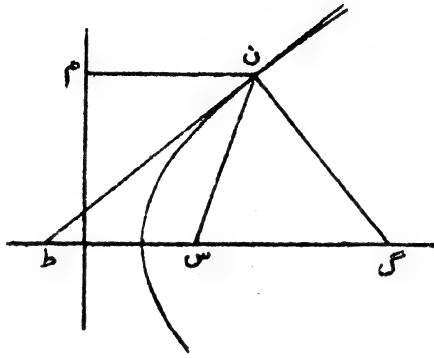
محور سے بالترتیب T اور G پر ملیں تو $S T = S N = S G$
 N سے مرتب پر عمود $N M$ نکالو

تب دفعہ ۲۹ کی رُو سے $M N > T N$ اور $S T = S N = S G$

لیکن چونکہ $N M \parallel S T$

اس لیے $M N > T N$ اور $S T = S N = S G$

اس لیے $T N > S N = S G$ (۱)



اس لیے $س ط = س ن$

چونکہ مثلث $ط ن گ$ میں $\angle ط ن گ = \angle ط ن گ$ قائمہ ہے

اس لیے $\angle ن ط گ + \angle ن گ ط = \text{ایک قائمہ}$

اس لیے $\angle ن ط گ + \angle ن گ ط$

$= \angle ط ن س + \angle س ن گ \dots\dots (۲)$

اس لیے (۱) اور (۲) کی مدد سے

$\angle ن گ ط = \angle س ن گ$

اس لیے $س ن = س گ$

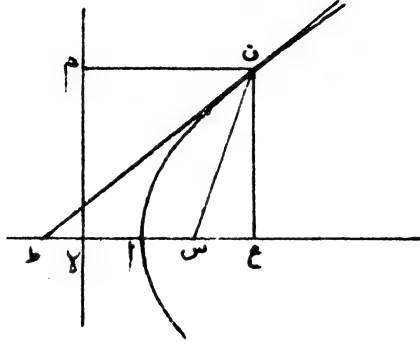
اس لیے $س ط = س ن = س گ$

۳۱۔ تعریف - اگر منحنی کے کسی نقطہ $ن$ پر کا ماس

محور سے $ط$ پر لے اور $ن$ کا عمود ہو محور پر، تو $ط$ کو $ن$ کا زیر ماس کہتے ہیں۔

مسئلہ - مکافی کے کسی نقطہ کے زیر ماس کی تنصیف راس پر

ہوتی ہے -



فرض کرو کہ مکانی کے کسی نقطہ ن پر کا ماس محور سے ط پر ملتا ہے
اور ن ع عمود ہے محور پر۔ ثابت کرنا ہے کہ نقطہ ن کے زیر ماس
ط ع کی تنصیف رأس ا پر ہوتی ہے۔

ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو۔

دفعہ ۳۰ کی رو سے ط س = س ن

لیکن س ن = ن م = لا ع

∴ ط س = لا ع

لیکن ا س = لا ع

اس لیے ط ا = ا ع یعنی ط ع کا وسطی نقطہ رأس ا ہے۔

۳۲۔ تعریف۔ اگر منحنی کے کسی نقطہ ن پر کا عماد

محور سے گ پر ملے اور ن ع عمود ہو محور پر تو ع گ کون کا زیر عماد
کہتے ہیں۔

مسئلہ۔ مکانی کے کسی نقطہ کا زیر عماد مستقل ہوتا ہے اور

(۳) دفعہ ۳۰ کی شکل میں ثابت کرو کہ $\angle ن س گ = ۲ \angle ن ط س$

(۴) مکانی کا ایک ماس کھینچو جو ایک دیے ہوئے خط کے متوازی ہو۔

(۵) دفعہ ۳۱ کی شکل میں ثابت کرو کہ $ط لا = س ع$

(۶) دفعہ ۳۱ کی شکل میں ثابت کرو کہ $\triangle م ط لا \equiv \triangle ن س ع$

(۷) دفعہ ۳۱ کی شکل میں ثابت کرو کہ $م ط = س ن$

(۸) دفعہ ۳۱ کی شکل میں ثابت کرو کہ $م ط ن س$ معین ہے۔

(۹) سوال ۸ کی مدد سے ثابت کرو کہ اگر $س$ ما عمود ہو $ن ط$ پر

تو ما وسطی نقطہ ہوگا $ن ط$ کا، اور ما ہمیشہ ۲ پر کے ماس پر واقع ہوگا۔

(۱۰) دفعہ ۳۱ کی شکل میں اگر $\triangle ن ط ع$ کے حاملہ دائرہ کا نصف

س ہو تو ثابت کرو کہ $س ن = ع ا \times س ن$ ۔

(۱۱) اگر دفعہ ۳۲ کی شکل میں $\triangle ن س گ$ مساوی الاضلاع

ہو تو مثلث کا ہر ضلع وتر خاص کے مساوی ہوگا۔

(۱۲) بتاؤ کہ مکانی کے دیے ہوئے نقطہ پر کا عماد ماس

کھینچنے کے بغیر کس طرح کھینچا جاسکتا ہے۔

(۱۳) دفعہ ۳۲ کی شکل میں ثابت کرو کہ $ن گ = ۲ \times س ن$

(۱۴) ثابت کرو کہ ماسک سے مکانی کے کسی عماد پر کے عمود کے پائین

کا طریقی مکانی ہوتا ہے۔

(۱۵) اگر دو مکافیوں کا ماسک مشترک ہو اور ان کے محور ایک ہی خط مستقیم

میں مخالف سمتوں میں واقع ہوں تو ثابت کرو کہ یہ مکانی ایک دوسرے کو

زاویہ قائمہ پر قطع کریں گے۔ [نوٹ:- اگر دو منحنیوں کے نقطہ تقاطع پر کے

ماس ایک دوسرے کو عمود وار قطع کریں تو کہا جاتا ہے کہ یہ منحنی ایک دوسرے کو

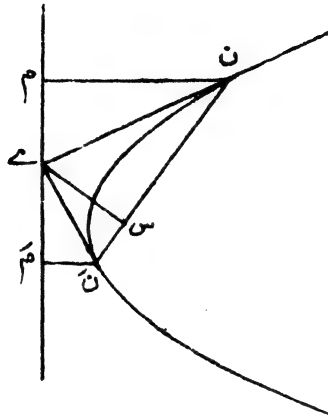
عمود وار یا علی القوائم یا زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔]

(۱۶) متعدد مکافیوں میں ماسک اور محور مشترک ہیں اور مشترک محور

کے ایک ثابت نقطہ سے ان کے ماسات کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ

نقاط تماس ایک دائرہ پر واقع ہیں۔

۳۳۔ مسئلہ۔ مکانی کے کسی ماسکی وتر کے سروں پر کے ماس ایک دوسرے کو مرتب پر عمود وار قطع کرتے ہیں۔



فرض کرو کہ ن س ن مکانی کا کوئی ماسکی وتر ہے۔

س میں سے س ہے، ن ن پر عمود وار کھینچو جو مرتب سے ہے پر
لے۔ ن ہے اور ن ہے کو طاؤ، اور ن م اور ن م مرتب پر عمود نکالو۔

چونکہ بموجب عمل \geq ن س مے قائم ہے،

اس لیے ن سے مکانی کا تماس ہے (بموجب عکس دفعہ ۲۸)

اس طرح سے نئے بھی مکانی کا ماس ہے۔

اور ان ماسوں کا نقطہ التقاطع مے مرتب پر مے۔

اب ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\sqrt{n} \leq n$ قائم ہے۔

دفعہ ۲۹ کی فرع کی رو سے

$$\angle \text{ن م س} = \angle \text{ن م م}$$

یعنی n اندرونی ناصف ہے \geq سے m کا

اسی طرح سے مے نَ اندرونی ناصف ہے > س مے مَ کا

ن م ن قائم ہے۔

امشرف

(۱) اگر مکانی کے ایک ماسکی وترن س ن کے سروں پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع سے ہو اور ن م اور ن م مرتب پر عمود ہوں تو ثابت کرد کہ م م کا وسطی نقطہ سے ہوگا۔

(۲) مرتب پر کے کسی نقطہ سے مکانی کے دو ماس ایک دوسرے پر عمود وار ہوتے ہیں۔

(۳) مکانی کے دو علی التوائم محاسن کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

(۴) کسی ماسکی وتر n کے سروں پر کے ماسوں کا لفظ تقاطع ہے ہے اور n م اور n م مرتب پر عمود ہیں۔ ثابت کرو کہ s م اور s م بالترتیب n م اور n م کے متوازی ہیں۔

(۵) ایک مکانی کا مرتب اور ایک محاس معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مکانی ایک اور ثابت خط کو مس کرتا ہے جو دیے ہوئے محاس پر عمود وار ہے۔

(۶) ایک مکانی کا مرتب اور ایک حماس معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مکانی کے ماسکے کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۳۴۔ مسئلہ۔ مکانی کے کسی نقطہ پر کے ماس پر کوئی

نقطہ ت ہو اور ت سے ن کے ماسکی فاصلہ میں ن پر عمود ت د اور
مرتب پر عمود ت ہ ہوں تو س د = ت ہ

فرض کرو کہ n پر کا ماس مرتب سے m پر ملتا ہے۔

ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو۔

چونکہ \geq ن س بے قاعدہ ہے اور اردوئے عمل \geq ن دت
بھی قائم ہے۔

اس لیے سنے // دت

اس لیے $\frac{\text{معد}$ = $\frac{\text{معد}}{\text{معد}}$ (۱)

یعنی ۱ا محور ۲س پر عمود ہے یعنی ۱ما راس ۱پر کا ماس ہے
(موجب فرع ۲ دفعہ ۲۹)

پس ثابت ہوا کہ ما کا طریق راس ۱پر کا ماس ہے -
(۲) اب چونکہ ن م متوازی ہے س لا کے

اس لیے $\angle ۱س ما = \angle س م ن$ (کیونکہ س ن = م ن)
= $\angle ن س م$

اب مثلثات ۱س ما اور ماس ن میں

$\angle ۱س ما = \angle ماس ن$

اور $\angle ما ۱س = \angle ن ماس$ (کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے)
اس لیے مثلثات ۱س ما اور ماس ن متشابه ہیں -

اس لیے $\frac{۱س}{س ما} = \frac{س م}{س ن}$

یعنی $س ما^۲ = ۱س \times س ن$

اس مسئلہ کے پہلے حصہ کا عکس نہایت اہم ہے اور حسبِ ذیل

ہے - عکس: اگر مکافی کے راس پر کے ماس پر کوئی نقطہ ما ہو
اور مان عمود کھینچا جائے ماس پر، تو مان مکافی کا ماس ہوگا۔
فرض کرو کہ س ما محدودہ مرتب سے م پر ملتا ہے،
م سے مرتب پر عمود م ن نکالو جو مان سے ن پر ملے
س ن کو ملاؤ -

مثلثات ن مام اور ن ماس میں

مام = ماس

مان مشترک ہے

اور $\angle ن مام = \angle ن ماس$ (کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے)

اس لیے مثلثات ن مام اور ن ماس آپس میں ہر طرح سے

برابر ہیں

اس لیے $n = m$ اور $m = n$ اس کایعنی n مکانی پر کا نقطہ ہے اور n کا نقطہ n پر کا ماس ہے۔فرع ۱۔ $m = n$ اس کاکیونکہ مثلثات $m = n$ اور $m = n$ متشابہ ہیں۔

فرع ۲۔ اگر ایک ثابت نقطہ سے ایک متغیر خط مستقیم پر

کے عمود کے پائین کا طریق ایک خط مستقیم ہو تو متغیر خط ایک ثابت مکانی کو مس کریگا جس کا ماسکہ دیے ہوئے ثابت نقطہ پر ہوگا۔

تعریف۔ اگر ایک خط ایک سطح مستوی میں اس طرح

حرکت کرے کہ وہ ہمیشہ ایک خاص منحنی کو مس کرے تو منحنی خط کا

لقاف کہلاتا ہے اور کہا جاتا ہے کہ خط منحنی کو لف کرتا ہے۔

پس مندرجہ بالا تعریف کی بناء پر فرع (۲) کو حسب ذیل

الفاظ میں بھی بیان کر سکتے ہیں :-

اگر ایک ثابت نقطہ سے ایک متغیر خط مستقیم پر کے عمود کے پائین کا

طریق ایک خط مستقیم ہو تو متغیر خط ایک ثابت مکانی کو لف کریگا جس کا

ماسکہ دیے ہوئے ثابت نقطہ پر ہوگا یا بالفاظ دیگر متغیر خط کا لقاف

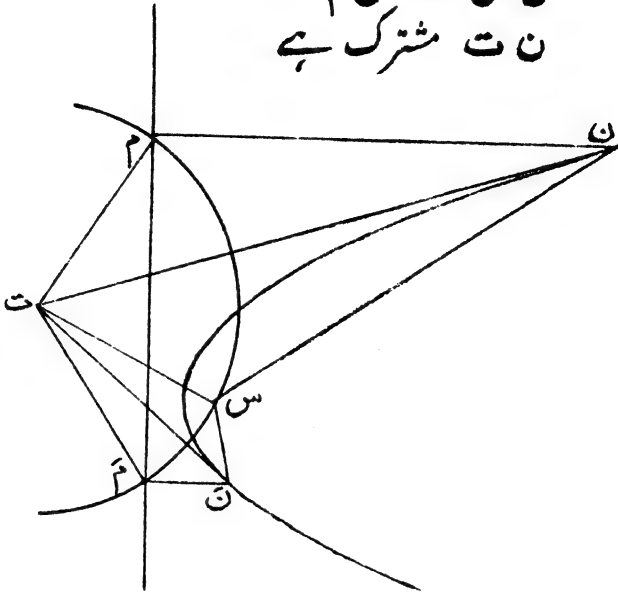
ایک مکانی ہوگا جس کا ماسکہ دیے ہوئے ثابت نقطہ پر ہوگا۔

۳۶۔ مسئلہ عملی۔ کسی بیرونی نقطہ سے مکانی کے دو ماس کھینچنا۔

طریقہ اول۔

تحلیل۔ فرض کرو کہ دیا ہوا بیرونی نقطہ t ہےاور بیرونی نقطہ t سے مکانی کے ماسات t اور n ہیں۔ n اور n سے مرتب پر بالترتیب عمود m اور n م نکالو۔اب مثلثات $m = n$ اور $m = n$ میں

ن س = ن م
ن ت مشترک ہے



ن س ن ت = م ن ت (دفعہ ۲۹)

۱۔ مثلثات س ن ت اور م ن ت آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں۔

۲۔ ت س = ت م

اس طرح سے ت س = ت م

پس نقاط م اور م معلوم ہو سکتے ہیں۔

ترکیب :-

ت کو مرکز مان کر ت س کی دُوری پر ایک دائرہ کھینچو جو مرتب

کو م اور م پر قطع کرے۔ م اور م سے مرتب پر بالترتیب عمود م ن

اور م ن نکالو جو مکافی سے ن اور ن پر ملیں، ت ن اور ت ن کو ملاؤ۔

تب ت ن اور ت ن مطلوبہ ماس ہوں گے۔

مثلثات س ن ت اور م ن ت میں

ن س = ن م

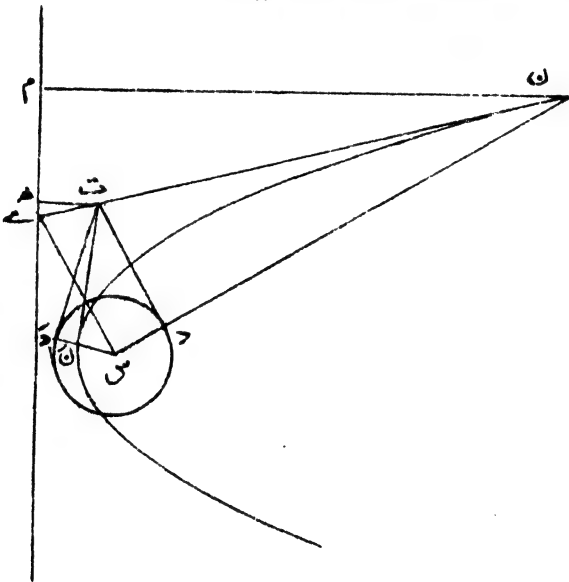
ن ت مشترک ہے۔

اور ت م ن = ت م (ازروئے عمل)
اس لیے مثلثات س ن ت اور م ن ت آپس میں ہر طرح سے
مساوی ہیں۔

∴ س ن ت = م ن ت
اس لیے دفعہ ۲۹ کے عکس کی رو سے
ن ت مکانی کا ماس ہوگا۔

اسی طرح سے ن ت بھی مکانی کا ماس ہوگا۔

طریقہ دوم۔
تحلیل۔ فرض کرو کہ دیے ہوئے بیرونی نقطہ ت سے
مکانی کے ماس ت ن اور ت ن ہیں۔



ت سے مرتب پر عمود ت م اور س ن اور م ن پر بالترتیب عمود
ت د اور ت د نکالو۔

تب دفعہ ۳۱ کی رو سے

$$س د = ت م = س د$$

چونکہ ت ہ معلوم ہے اس لیے س د معلوم ہو سکتا ہے۔

اور چونکہ د اور د کے زاویے قائمے ہیں۔

اس لیے ت د اور ت د اُس دائرہ کے ماس ہیں جس کا مرکز س ہے اور نصف قطر س د ہے جو ت ہ کے مساوی ہے۔

پس تحلیل بالا کی بنا پر بیرونی نقطہ ت سے مکانی کے دو ماس کھینچنے کا حسب ذیل عمل حاصل ہوتا ہے۔

ترکیب۔ دیے ہوئے نقطہ ت سے مرتب پر عمود ت ہ نکالو۔
س کو مرکز مان کر ت ہ نصف قطر کا دائرہ کھینچو اور ت سے اس دائرہ کے ماسات ت د اور ت د کھینچو۔

س د اور مکانی کا نقطہ تقاطع ن اور س د مکانی کا نقطہ تقاطع ن معلوم کرو۔ تب ت ن اور ت ن مکانی کے دو مطلوبہ ماس ہونگے۔

فرض کرو کہ ن ت مرتب سے مے پر ملتا ہے۔

س مے کو ملاو، اور ن سے مرتب پر عمود ن م نکالو۔

تمشابہ مثلثات مے ت ہ اور مے ن م میں

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{ت\ م}{ن\ م} = \frac{مے\ ت}{مے\ ن}$$

چونکہ ن مکانی پر کا نقطہ ہے اس لیے ن م = س ن (۲)

اور بموجب عمل دائرہ (س) کا نصف قطر س د = ت ہ (۳)

(۲) اور (۳) کی مدد سے رشتہ (۱) ہو جاتا ہے

$$\frac{مے\ ت}{مے\ ن} = \frac{س\ د}{س\ ن}$$

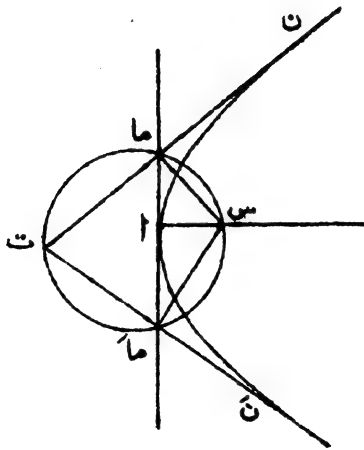
اس لیے س مے // د ت

اس لیے > ن س مے قائمہ ہے۔

اس لیے ن سے مکانی کے نقطہ ن پر کا ماس ہے اور یہ ماس
ازروئے عمل دیے ہوئے بیرونی نقطہ ت میں سے گزرتا ہے۔
اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ت ن بھی مکانی کا ماس ہے۔
یعنی ت سے مکانی کے مطلوبہ ماس ت ن اور ت ن ہیں۔
نوٹ :- شکل بالا میں دائرہ (س) کے ماسات ت د اور ت د
کے محاذی ماسکے س پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔

یعنی $\angle ت س ن = \angle ت س ن$
پس ضمناً یہ بھی معلوم ہوا کہ کسی بیرونی نقطہ سے مکانی کے دو ماسوں کے
مقابل ماسکے پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔

طریقہ سوم -
تحلیل - فرض کرو کہ دیے ہوئے بیرونی نقطہ ت سے
مکانی کے ماسات ت ن اور ت ن ہیں۔



ماسکے س سے ماسات ت ن اور ت ن پر بالترتیب عمود س ما
اور س ما نکالو۔

تب دفعہ ۲۵ کی رُو سے نقاط ما اور ما راس ۲ پر کے تماس
پرواقع ہونگے۔

نیز چونکہ زاویے س مات اور س مات قائم ہیں،
اس لیے ت س کے قطر پر کا دائرہ نقاط ما اور ما سے گزرے گا۔
پس تحلیل بالا کی بنا پر تماسات کھینچنے کا حسب ذیل عمل حاصل ہوتا ہے۔
ت س قطر پر دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ یہ دائرہ راس ۱ پر کے تماس
سے ما اور ما پر ملتا ہے۔

تب ت ما اور ت ما محدودہ مکانی کے مطلوبہ تماس ہونگے۔
چونکہ ماسکہ س سے خطوط ت ما اور ت ما پر کے عمودوں کے پائیں
راس ۱ پر کے تماس پر ہیں، اس لیے دفعہ ۲۵ کے عکس کی رُو سے
خطوط ت ما اور ت ما محدودہ مکانی کے تماس ہیں جن کے نقاط تماس
بالترتیب ن اور ن دفعہ ۲۵ کے مسئلہ کے عکس کے طریقہ سے معلوم
ہو سکتے ہیں۔

امثلہ ۱

(۱) اگر مکانی کے مرتب پر کے کسی نقطہ م سے مکانی کے تماسات
کھینچے جائیں تو دفعہ ۳۶ کے طریقہ اول کی مدد سے ثابت کرو کہ تماسات کا درمیانی
زاویہ قائم ہے۔

(۲) اگر ایک زاویہ قائمہ کی ایک ساق ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے
اور راس ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرے تو ثابت کرو کہ دوسری ساق
ایک مکانی کو مس کریگی جس کا ماسکہ دیا ہوا ثابت نقطہ ہے اور جس کے
راس پر کا تماس دیا ہوا ثابت خط مستقیم ہے۔

(۳) مکانی کا ماسکہ اور دو تماس معلوم ہیں، مرتب معلوم کرو۔

(۴) مکانی کا ماسکہ اور ایک تماس معلوم ہیں۔ راس کا طریق معلوم کرو۔

(۵) مکانی کے کسی نقطہ ن پر کا تماس راس ۱ پر کے تماس سے

ما پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ما میں سے محور کے متوازی خط ماسکی فاصلہ
س ن کی تنصیف کرتا ہے۔

(۶) مکانی کا کوئی ماس مرتب کے متوازی ایک ثابت خط سے
ملتا ہے اور نقطہ تقاطع سے ماس پر عمود وار ایک خط کھینچا گیا ہے۔
ثابت کرو کہ یہ خط ایک مکانی کو مس کرتا ہے جس کا ماسکہ وہی ہے جو
دیے ہوئے مکانی کا ہے۔

(۷) مکانی پر کوئی نقطہ ن ہے، ثابت کرو کہ ن س کے قطریہ
کا دائرہ راس پر کے ماس کو مس کرتا ہے۔

(۸) مکانی کے کسی نقطہ ن پر کا ماس راس پر کے ماس سے

ما پر اور مرتب سے ہے پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ (۱) ن ما × ن سے = ن س
اور (۲) ن ما × ما ہے = اس × س ن

(۹) مکانی کا ماسکہ محور اور ایک ماس معلوم ہیں۔ مکانی کو مرسم کرو۔

(۱۰) مکانی کا ماسکہ س مکانی پر کا ایک نقطہ ن اور س سے

ن پر کے ماس پر کے عمود کا طول معلوم ہیں مکانی کو مرسم کرو۔

(۱۱) مکانی کا ماسکہ ایک ماس اور وتر خاص کا طول معلوم ہیں۔

مکانی کو مرسم کرو۔

(۱۲) ایک مکانی ایک اعم مساوی مکانی پر (جو ثابت ہے) اس

طرح لڑھکتا ہے کہ ابتداءً ان کے راس ایک دوسرے پر منطبق ہیں۔
ثابت کرو کہ لڑھکنے والے مکانی کا ماسکہ ثابت مکانی کے مرتب پر
حرکت کرتا ہے۔

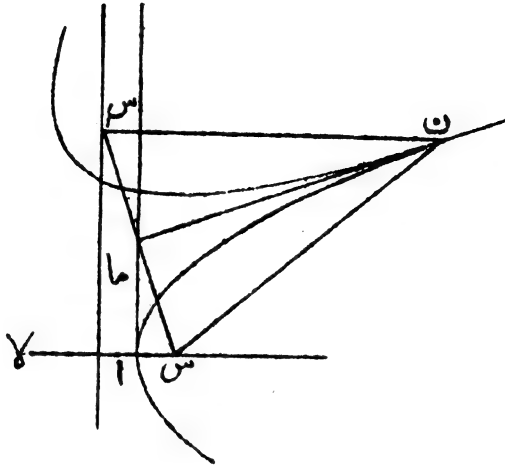
[اشارہ - کسی ایک مقام پر مکافیوں کے راسوں سے نقطہ تماس

ن تک تو سوں کے طول مساوی ہونگے اس لیے نقطہ تماس کے ماسکی فاصلے

ن س، ن س، بھی مساوی ہونگے۔ اور نقطہ تماس ن پر کا مشترک ماس

ن ما ماسوں کو ملانے والے خط س س کی عمودی تنصیف ما پر کریگا۔

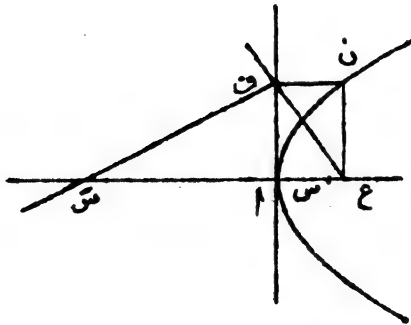
اور یہ نقطہ تقاطع ما ہمیشہ ثابت مکانی کے راس پر کے ماس پر



ہوگا۔ اس لیے کڑھکنے والے مکانی کا ماسک میں ثابت مکانی کے مرتب پر ہوگا۔

(۱۳) مکانی کے کسی نقطہ ن سے محور پر عمود ن ع اور رأس پر کے ماس

پر عمود ن ف نکالے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ع ف ایک ثابت مکانی کو مس کرتا ہے۔



ف سے ایک خط ف س، ف ع پر عمود وار کھینچو جو دیے ہوئے مکانی کے

محور سے متں پر ملے۔

قائم الزاویہ مثلث $ع ف س$ میں $ا ف^2 = ا ع \times ا س$ (۱)

لیکن $ا ف = ع ن$

نیز $ع ن^2 = ا س \times ا ع$

اس لیے $ا ف^2 = ا س \times ا ع$ (۲)

(۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$ا س = ا س$

اس لیے $س$ ایک ثابت نقطہ ہے۔

اس لیے $ع ف$ ایک مکانی کو مس کرتا ہے جس کا ماسکہ $س$ ہے اور جس کے رأس پر کا ماس $ا ف$ ہے۔

(۱۴) ہم مرکز دائروں کے ایک نظام کو ایک ثابت خط جی نقطوں پر قطع کرتا ہے، اُن نقطوں پر دائروں کے ماسات کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ یہ ماسات ایک ثابت مکانی کو مس کرتے ہیں۔

(۱۵) مکانی کے ماسکہ $س$ میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو

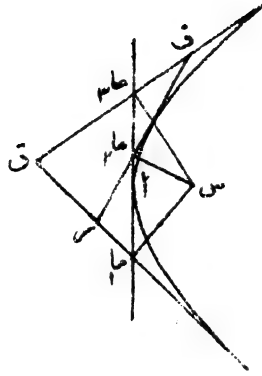
مکانی کے کسی ماس سے ایک دیے ہوئے زاویہ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ماس اور اس خط کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔
[مطلوبہ طریق مکانی کا ایک ماس ہے جو محور کے ساتھ دیے ہوئے زاویہ کے مساوی زاویہ بناتا ہے]

۳۔ اگر ایک مثلث کے تینوں ضلعے ایک مکانی کو

مس کریں تو مثلث کا حائل دائرہ مکانی کے ماسکہ میں سے گذرے گا۔

فرض کرو کہ مثلث $ف ق س$ کے ضلعے مکانی کو مس کرتے ہیں۔ ماسکہ $س$ سے مثلث کے ضلعوں پر کے عمودوں کے پائیں $صا$ ، $صا$ ، $صا$

ہیں اور یہ دفعہ ۳۵ کی رُوسے رُاس ۲ پر کے ماس کے واقع ہیں -



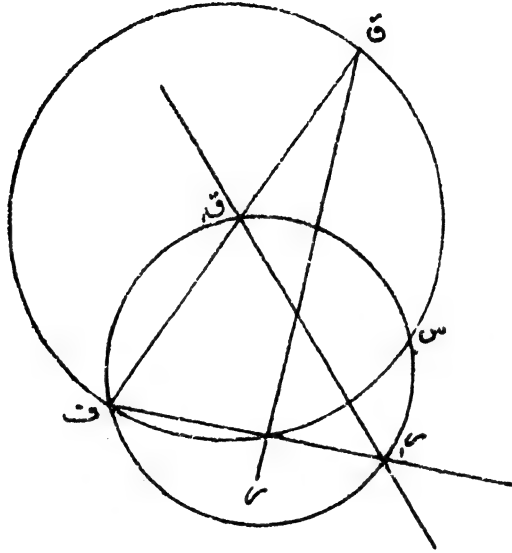
یعنی ماسکے میں سے مثلث ق س م کے ضلعوں پر کے عمودوں کے پائے
ایک خط مستقیم میں واقع ہیں -
اس لیے مثلث ق س م کا حائط دائرہ ماسکے میں سے گزرتا ہے -

امثلہ ۱۱

(۱) اُس مکافی کے ماسکے کا طریق معلوم کرو جو ایک دیے ہوئے
مثلث کے تینوں ضلعوں (ممدودہ بشرط ضرورت) کو مس کرتا ہے -
(۲) ثابت کرو کہ بالعموم صرف ایک مکافی ایسا ملے گا جس سے چار
دیے ہوئے خطوط مستقیم کو (جن میں سے کوئی دو متوازی نہیں ہیں اور کوئی
تین متراکز نہیں ہیں) مس کرتا ہے -

[فرض کرو کہ دیے ہوئے چار خطوں سے بننے والے چار مثلثوں
میں سے دو مثلث ق س م اور ق س م ہیں، ان مثلثوں کے
ضلعوں کو مس کرنے والے مکافی کا ماسکے ان مثلثوں کے حائط دائروں کے
دوسرے نقطہ تقاطع میں واقع ہوگا - اور اس سے دیے ہوئے خطوط پر

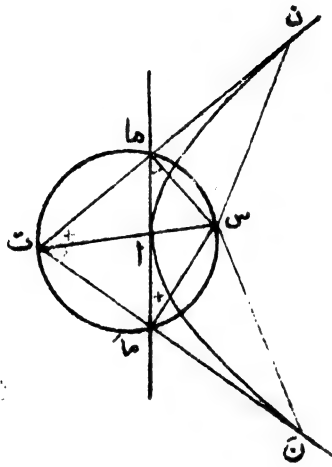
عمودوں کے پائیں میں سے گزرنے والا خط مستقیم راس پر کا حماس ہوگا۔



اب چونکہ ماسکہ اور راس پر کا حماس معلوم ہیں اس لیے مکانی مرسم ہو سکتا ہے۔
نوٹ - علم ہندسہ مستوی کی مدد سے ثابت ہو سکتا ہے کہ دیئے ہوئے
چار خطوط سے بننے والے چار مثلثوں کے حاطط دائرے ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔
(۳) ایک مثلث کے اضلاع مکانی کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث
کا عمودی مرکز مکانی کے مرتب پر واقع ہوگا۔

[فرض کرو کہ مثلث ف ق س کے اضلاع مکانی کو (جس کا ماسکہ
س ہے) مس کرتے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ مثلث کا عمودی مرکز و ہے
ہمیں معلوم ہے کہ بیضا مثلث ف ق س کے ماس کا خط پائیں س و
کے وسطی نقطہ میں سے گزرتا ہے اور چونکہ س کا خط پائیں مکانی کے
راس پر کا حماس ہے اس لیے حاصل ہوتا ہے کہ و مکانی کے
مرتب پر واقع ہے۔]

(۴) ایک مکانی کا ماسک س ہے اور مکانی پر کے نقاط ن اور ن پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع ت ہے، ثابت کرو کہ مثلثات س ن ت اور س ن ت متشابه ہیں۔



[فرض کرو کہ مکانی کے رأس ۱ پر کا ماس ماسات ت ن اور ت ن سے بالترتیب ما اور ما پر ملتا ہے، تب زاویے س ماسات اور س ماسات دونوں قائمے ہیں۔ اس لیے س، ما، ت، ما مشترک المحيط ہیں۔

اس لیے $\angle س ت م = \angle ماس ماسات$ لیکن دفعہ ۳۵ کی فرع (۱) کی رو سے

$$\angle ماس ماسات = \angle س ن م$$

اس لیے $\angle س ت ن = \angle س ن ت$

اسی طرح سے $\angle س ن ت = \angle س ت ن$

اس لیے مثلثات س ن ت اور س ن ت متشابه ہیں۔

(۵) اوپر کے سوال ۴ کی مدد سے ثابت کرو کہ اگر مکانی کے نقطوں ن اور ن پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع ہو تو $\angle ت س ن = \angle ت س ن$ یعنی مکانی کے ماسوں کے مقابل ماسک پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔ (تقابلہ کرو دفعہ ۳۶ طریقہ دوم کا نوٹ)

(۶) سوال ۴ کی مدد سے ثابت کرو کہ $س ن ت = س ن \times س ن$

(۷) سوال ۴ کی مدد سے ثابت کرو کہ $\frac{س ن}{س ن} = \frac{ت ن}{ت ن}$

(۸) سوال ۴ کی مدد سے اس مسئلہ کا متبادل ثبوت بہم پہنچاؤ کہ مکانی کے کسی تین ماسوں سے بننے والے مثلث کا حائط دائرہ ماسک میں سے گزرتا ہے۔“

(۹) طن اور ط ن مکانی کے دو ماس ہیں، ن ط کو کسی نقطہ تک خارج کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ $\angle ن ط ف = \angle ن س ط$ یعنی مکانی کے کسی دو ماسوں کے درمیان کا خارجی زاویہ اُس زاویہ کے مساوی ہوتا ہے جو ان میں سے کسی ایک ماس کے محاذی ماسک پر بنتا ہے۔
(۱۰) مکانی کا وترن ن محور پر عمود وار ہے۔ کسی اور نقطہ پر کا ماس نقاط ن اور ن پر کے ماسات سے ت اور ت پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ $س ت = س ت$

(۱۱) مکانی کے کسی ماس پر نقاط اور ت ایسے لیے گئے ہیں کہ $س ت = س ت$ ثابت کرو کہ ت اور ت سے مکانی کے دوسرے ماسات ایک دوسرے کو محور پر قطع کرتے ہیں۔

۳۸۔ مسئلہ۔ اگر ایک مکانی کے متوازی وتروں کا

ایک نظام ہو تو ان وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خط مستقیم ہوگا جو محور کے متوازی ہے۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نظام کا کوئی ایک وترن ن ہے،

اس لیے متوازی دتروں کے دیے ہوئے نظام کے کسی ایک وتر کا وسطی نقطہ ص اس خط مستقیم پر ہوگا جو ثابہت نقطہ ق میں سے گزرتا ہے اور محور کے متوازی ہے۔ یعنی مکانی کے متوازی دتروں کے کسی دیے ہوئے نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو محور کے متوازی ہے۔

تعریف۔ مکانی کے متوازی دتروں کے وسطی نقطوں کے طریق کو قطر کہتے ہیں اور جہاں یہ قطر مکانی کو قطع کرتا ہے اُس نقطہ کو قطر کا سرا کہتے ہیں۔

نوٹ۔ مندرجہ بالا مسئلہ سے ظاہر ہے کہ مکانی کا ہر قطر محور کے متوازی ہے۔

فہرست۔ اگر مکانی کے متوازی دتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والا قطر مکانی سے ع پر ملے تو ع پر کا ماس اس نظام کے دتروں کے متوازی ہوگا۔

ع میں سے ایک خط اس نظام کے دتروں کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ خط مکانی سے مکرر ع پر ملتا ہے۔ تب ع ع کا وسطی نقطہ قطر ع ص پر ہوگا یعنی ع ع کا وسطی نقطہ ع ہوگا جو صرف اسی صورت میں ممکن ہو سکتا ہے جبکہ ع ع پر منطبق ہو۔

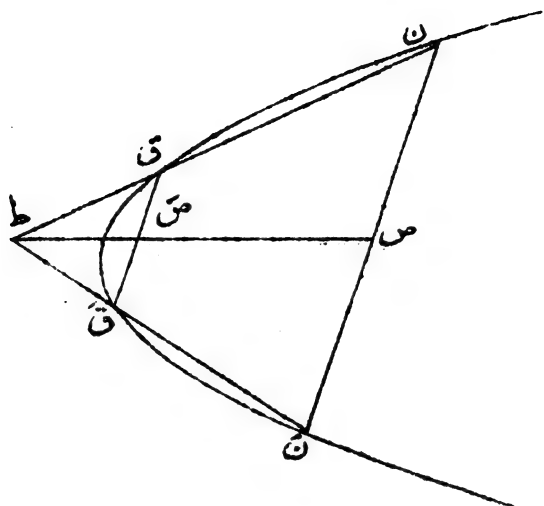
اس لیے وہ خط جو ع میں سے گزرتا ہے اور نظام کے دتروں کے متوازی ہے نقطہ ع پر مکانی کا ماس ہے۔

یعنی مکانی کے متوازی دتروں کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والے قطر کے سرے پر کا ماس ان دتروں کے متوازی ہوگا۔

۳۹۔ مسئلہ۔ مکانی کے کسی وتر کے سروں پر کے ماس ایک دوسرے کو اُس قطر پر قطع کرتے ہیں جو دیے ہوئے وتر کی تعصیف کرتا ہے۔

فرض کرو کہ مکانی کا ایک دیا ہوا وتر ن ن ہے ایک اور وتر ق ق

وترن ن کے متوازی کھینچو۔



فرض کرو کہ ن ن اور ق ق کے وسطی نقطے بالترتیب ص اور ص ہیں۔ تب ص ص میں سے گزرنے والا خط مکانی کا ایک قطر ہوگا۔ فرض کرو کہ ن ق قطر ص ص سے ط پر ملتا ہے۔

$$\text{تب} = \frac{\text{ص ط}}{\text{ص ق}} = \frac{\text{ص ن}}{\text{ص ق}}$$

لیکن ازروئے عمل ص ن = ص ن اور ص ق = ص ق

اس لیے $\frac{ص ط}{ص ط} = \frac{ص ن}{ص ن}$

اس لیے نَقِطَہ ایک خطِ مستقیم ہے۔

یعنی ن ق اور ن ق کا نقطہ تقاطع ط، ص میں سے گزرنے والے قطر پر واقع ہے۔

اب فرض کرو کہ وترق ق اپنے متوازی حرکت کرتا ہوا وترن کے قریب آ جاتا ہے اور بالآخر ن پر منطبق ہو جاتا ہے۔

اب مثلث ن ع ط میں ص ط ایک خط ہے جو ن ع کے وسطی نقطہ ص میں سے گزرتا ہے اور ع ط کے متوازی ہے۔

اس لیے $ن ط = ط ط$

اب مثلث ن ص ط میں ط ع ایک خط ہے جو ن ط کے وسطی نقطہ ط میں سے گزرتا ہے اور ن ص کے متوازی ہے۔

اس لیے $ط ع = ع ص$

امثلہ ۱۲

(۱) مکافی کے متوازی دتروں کا ایک نظام ہے۔ ان دتروں میں سے ہر ایک کے سروں پر کے ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔

(۲) ثابت کرو کہ مکافی کے ماسک میں سے مکافی کے کسی دتر پر کا عمود اور اس دتر کی تنصیف کرنے والے قطر کا نقطہ تقاطع مرتب پر ہوتا ہے۔

(۳) اگر مکافی کے متوازی دتروں میں سے ہر ایک محور کے ساتھ ۹۰° کا زاویہ بنائے تو ان دتروں کی تنصیف کرنے والا قطر دتر خاص کے ایک سرے میں سے گزرے گا۔

(۴) ایک مکافی کا غد پر کھنچا ہوا ہے۔ اس کا ماسکہ اور مرتب معلوم کرو۔

کوئی دو متوازی وترن ن اور ق ق کھینچو۔

تب ان کے وسطی نقطوں ص، ص میں سے گزرنے والا خط مکافی کے محدد کے متوازی ہوگا۔

ن سے ص ص پر عمود نکالو اور اسے اتنا خارج کرو کہ یہ گور مکافی ن پر ملے۔

ن ن کے وسطی نقطہ ع میں سے ص ص کے متوازی خط کھینچو جو مکافی سے ا پر ملے، تب ا مکافی کا راس ہوگا اور ا ع محور ہوگا۔

طول حاصل ہو سکتا ہے جس سے ماسک اور مرتب معلوم ہو سکتے ہیں۔

(۵) ن س ن مکانی کا کوئی ماسکی وتر ہے اور اس میں سے وتر ا ق کھینچا گیا ہے جو ن کے متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ

$$س ن = س ن = ا ق$$

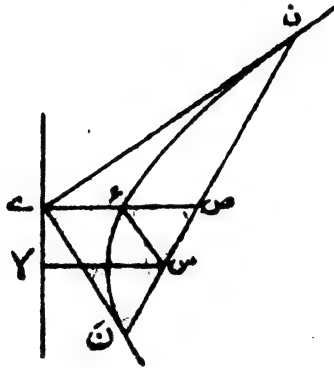
(۶) اگر سوال بالا میں ن ع اور ن ع محور پر عمود ہوں تو

$$ثابت کرو کہ ع غ = ا ق$$

(۷) مکانی کے کوئی دو وتر محور کے ساتھ مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان وتروں کے وسطی نقطے محور سے متساوی الفصل ہیں۔

(۸) ن س ن مکانی کا کوئی ماسکی وتر ہے اور ن ن کی تنصیف

کرنے والا قطر مکانی سے ع پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ن = س ع
[ماسکی وتروں کے سروں ن ن پر کے ماس ایک دوسرے کو



مرتب پر کے ایک نقطہ سے پر عمود وار قطع کرتے ہیں۔ اور ن کے وسطی نقطہ ص میں سے گزرنے والا قطر بھی سے میں سے گزرتا ہے۔ نیز ص ع = ع سے

قائم الزاویہ مثلث سے ن ن میں

ن ن = ۲ ص سے = ۴ ع سے = ۴ م سے ع
(۹) سوال ۸ کی مدد سے مکانی کا ایک ماسکی وتر کھینچو جس کا طول

معلوم ہو۔

(۱۰) اگر مکانی کے دو ماسکی وتر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ یہ محور کے ساتھ مخالف سمتوں میں مساوی زاویے بناتے ہیں۔

(۱۱) مکانی کا وتر خاص سب سے چھوٹا ماسکی وتر ہے۔

(۱۲) مکانی کے کسی ماسکی وتر کے سروں پر کے ماسوں کے نقطہ تقاطع

اور عمادوں کے نقطہ تقاطع کو ملانے والا خط محور کے متوازی ہوتا ہے۔

(۱۳) مکانی کے نقطہ ن پر کا عماد مکانی سے مکرر ن پر ملتا ہے۔

ن پر کے ماسوں کے نقطہ تقاطع ت میں سے گزرنے والا قطر مکانی سے ق پر ملے تو ثابت کرو کہ ن ق اس کے میں سے گزرتا ہے۔

(۱۴) ن ن اور ق ق مکانی کے دو متوازی وتر ہیں، ن اور ن

پر کے ماسات ق ق سے ت اور ت پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$ق ت = ق ت$$

۱۱

مشلہ ۱۳

(مکانی پر متفرق سوالات)

(۱) اگر مکانی کے ایک وتر کا طول اس وتر کے وسطی نقطہ اور مرتب کے درمیانی

فاصلہ کا دو چہند ہو تو ثابت کرو کہ وتر مذکور ماسکے میں سے گزرے گا۔

(۲) ایک دیے ہوئے قاعدہ ا ب پر ایک مساوی الساقین مثلث

ا ب م بنایا گیا ہے اور قاعدہ ا م پر ایک اور مساوی الساقین مثلث

ا م ن مثلث ا ب م کے متشابه بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا

طریق ایک مکانی ہے جس کا ماسکے ا ہے، اور جس کا مرتب ا ب کا

عمودی منصف ہے۔

(۳) ایک ثابت نقطہ ہے اور ایک ثابت خط پر کوئی نقطہ $ق$ ہے $ق$ سے ثابت خط پر عمود $ق$ ن کھینچا گیا ہے اور $ا$ ن عمود ہے $ا$ ق پر ثابت کر دو کہ $ق$ ن کا طریق ایک مکانی ہے جس کا $ا$ س ہے۔

(۴) $ن$ س $ن$ مکانی کا ایک ماسکی وتر ہے اور $ن$ اور $ن$ میں سے محور کے متوازی خطوط کھینچے گئے ہیں جو $ن$ اور $ن$ پر عمودوں سے بالترتیب $ق$ ، $ق$ پر ملتے ہیں۔ ثابت کر دو کہ $ن$ $ق$ $ق$ $ن$ ایک مستقیم ہے۔

[اشارہ - چونکہ $ن$ س $ن$ ایک ماسکی وتر ہے اس لیے $ن$ اور $ن$ پر کے تماسات علی القوام ہیں۔ اس لیے $ن$ پر کا عمود $ن$ کے ماس کے متوازی ہے۔ اس لیے $ن$ $ق$ $ق$ $ن$ = $ن$ $ق$ $ق$ $ن$ یعنی $ن$ $ق$ = $ن$ $ق$ اسی طرح $ن$ $ق$ = $ن$ $ق$]

(۵) ایک مکانی بناؤ جو تین دیے ہوئے خطوط کو مس کرے اور جس کا ماسک ایک دیے ہوئے خط پر ہو۔

(۶) ثابت کر دو کہ مکانی کے دو ثابت ماسوں اور ایک متغیر ماس سے بننے والے مثلث کے حاض و دائرہ کے مرکز کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

(۷) مکانی کے کسی نقطہ $ن$ پر کے ماس پر $ا$ س سے عمود نکالا گیا ہے جو $ن$ میں سے گزرنے والے اور محور کے متوازی خط سے $ق$ پر ملتا ہے۔ ثابت کر دو کہ $ق$ کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو مکانی کے محور پر عمود وار ہے۔ [اشارہ - فرض کر دو کہ $ن$ پر کا ماس محور سے $ت$ پر ملتا ہے۔

$ن$ اور $ق$ سے محور پر عمود $ن$ ع، $ق$ م نکالو۔ تب مثلثات $ن$ $ت$ $ع$ اور $ا$ $ق$ $م$ متشابه ہونگے۔ اس لیے $ا$ م \times ع $ت$ = $ن$ ع = $ا$ م \times س $ا$ ع اس لیے $ا$ م = $ا$ س]

(۸) مکانی کے نقطہ $ن$ پر کا عمود محور سے $گ$ پر ملتا ہے۔ ثابت کر دو کہ $ن$ گ مکانی کے $ا$ س مستقیم کے مساوی ہے جو $ن$ گ کی تضعیف کرتا ہے۔

[اشارہ - فرض کرو کہ ن گ کے وسطی نقطہ میں سے گزرنے والا مستقیم مکانی سے سر پر اور محور سے م پر ملتا ہے۔ ن سے محور پر عمود ن ع نکالو۔

$$\text{ع م} = \frac{1}{4} \text{ع گ} = \text{اس}$$

$$\text{اب م م} = \text{اس} \times \text{اس} = \text{اس} \times \text{اس} + \text{اس} \times \text{اس} = \text{اس}^2$$

$$= \text{ن ع} + \text{ع گ} = \text{ن گ}$$

(۹) مکانی کا کوئی نقطہ ن ہے اور ماسکہ م سے ان پر کا عمود رأس پر کے ماس سے سر پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا معین اس^2 کے مساوی ہے۔

(۱۰) مکانی پر کے کسی نقطہ ن کا معین ن ع ہے اور ن پر کا ماس رأس پر کے ماس سے ما پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ماس ہمیشہ ایک ثابت مکانی کو مس کرتا ہے جو دیے ہوئے مکانی کے مساوی ہے۔ [اشارہ - ماس پر عمود وار ماس کھینچو جو محور سے م سے ملے۔ ثابت کرو کہ $\text{اس} = \text{اس}$]

(۱۱) ن م ن اس مکانی کا ایک ماسکی وتر ہے جس کا رأس ا ہے اور ان اور ان وتر خاص سے ک اور ک پر ملتے ہیں۔ اگر ن ع اور ن ع محور پر عمود ہوں تو ثابت کرو کہ ع ن س ک اور ع ن م ک دونوں متوازی الاضلاع ہیں

$$[اشارہ - \frac{\text{م م}}{\text{اس}} = \frac{\text{ع ن}}{\text{ع م}} = \frac{\text{اس}}{\text{اس}}]$$

یعنی ع ن \times م م = اس ک، لیکن ا مثلاً سوال (۲۰) کی رو سے ع ن \times ع ن = ع ن \times م م = اس لے م م = ک = ع ن اسی طرح سے م م = ع ن

(۱۲) دو مکانیوں کا ماسکہ مشترک ہے اور ان کے مشترک ماس پر کے کسی نقطہ سے مکانیوں کے دوسرے ماسات کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان آخر الذکر ماسوں کا درمیانی زاویہ مکانیوں کے محوروں کے درمیانی زاویہ کے

مساوی ہے -

(۱۳) متعدد مکانی کھینچے گئے ہیں جو ایک دیے ہوئے نقطہ N میں سے گزرتے ہیں اور جن کا مرتب ایک دیا ہوا خط ہے۔ بتاؤ کہ ان میں سے ہر ایک ایک اور ثابت مکانی کو مس کرتا ہے جس کا ماسکہ دیا ہوا نقطہ N ہے۔

[اشارہ - دیے ہوئے نقطہ N سے دیے ہوئے مرتب M کا

پر عمود N M نکالو اور N M مددہ پر نقطہ L لے لیا کہ M L = N M اور L میں سے دیے ہوئے مرتب کے متوازی L لے کھینچو۔ فرض کرو کہ

مکانیوں کے دیے ہوئے نظام کے کسی ایک کُرکن کا ایک ماسکی وتر N میں ہے۔ N سے L پر عمود N L نکالو اور ثابت کرو کہ N N = N L

یعنی N اُس مکانی کا ایک نقطہ ہے جس کا ماسکہ N اور مرتب L ہے نیز چونکہ ان دونوں مکانیوں کے نقطہ N پر کا ماس زاویہ N N L کا اندرونی

منصف ہے، اس لیے یہ دونوں مکانی ایک دوسرے کو N پر مس کرتے ہیں [(۱۴) مکانی کے نقطہ N پر کا ماس محور سے ط پر ملتا ہے اور

N Q ایک وتر ہے جو محور کے ساتھ وہی زاویہ بناتا ہے جو N پر کا ماس بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ N Q = N P -

(۱۵) ایسے مکانی کھینچے گئے ہیں جن کا مشترک راس A ہے

اور جو ایک ثابت نقطہ N میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مکانیوں کے مرتبوں کا لغات ایک مکانی ہے جس کے وتر خاص کا طول AN کے

مساوی ہے۔

[اشارہ - A سے N پر عمود AN کھینچو جو دیے ہوئے نظام کے

ایک مکانی کے مرتب سے L پر ملے اور L میں سے محور کے متوازی ایک خط کھینچو جو AN سے Q پر ملے۔ ثابت کرو کہ AL = AN اور AN = AN [

(۱۶) ایک دیے ہوئے قاعدہ AB پر ایک مساوی اساقین

ثلث ABC بنایا گیا ہے۔ اور A اور C پر مثلث ABC کے حاطہ دائرہ کے ماس ایک دوسرے کو N پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

ن کا طریق ایک مکافی ہے جس کا ماسکہ 'ا'، محور 'اب'، چمچہ ہے، اور جس کے وتر خاص کا طول 'اب' کے مساوی ہے۔

(۱۷) ایک متغیر دائرہ جس کا مرکز ایک ثابت نقطہ میں ہے دو ثابت متوازی خطوط کو بالترتیب 'ا'، 'ا' اور 'ب'، 'ب' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ خطوط 'اب'، 'اب'، 'اب'، 'اب' ایک ثابت مکافی کو مس کرتے ہیں۔

(۱۸) مکافی پر کے کسی نقطہ ن کے معین ن ع پر نقطہ ق اس طرح

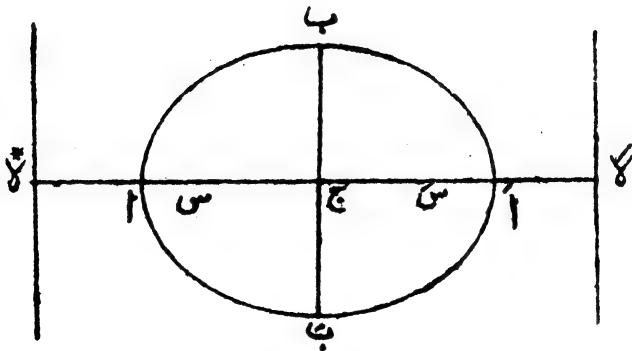
لیا گیا ہے کہ $\frac{ع ق}{ع ن} = \text{مستقل}$ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک اور مکافی ہے۔



تیسرا باب

ناقص

۴۱۔ دفعہ (۱۱) کی تعریف کے بموجب ناقص ایک مخروطی ہے جس کا خروج المرکز ز ۱۔ پہلے باب (دفعات ۵ تا ۱۰) میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ ناقص ایک بند بیضوی مغنی ہے جس کے دو تشاکل کے محور ہیں جو ایک دوسرے کو مرکز ج پر عمود وار قطع کرتے ہیں اور جن میں سے ایک محمد ا ا مرتب پر عمود وار ہے۔

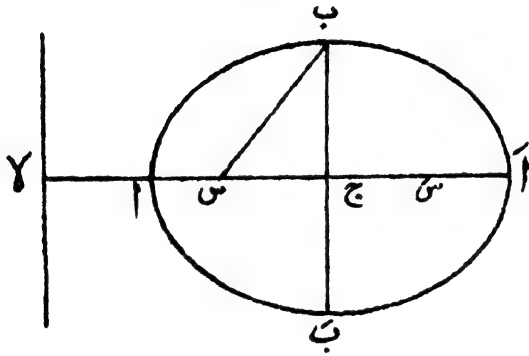


اور دوسرا محور ب ب مرتب کے متوازی ہے۔ نیز محور ا ا پر دو ماسکے
س ا اور س واقع ہیں اور ان ماسکوں کے جواب کے دو مرتب ہیں جو ا ا
پر عمود وار ہیں اور ا ا محدودہ کو مرکز ج سے مساوی فاصلوں پر بالترتیب
لا اور لا پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ ج س : ج ا = ج ا : ج لا = ز
ماسکوں میں سے گزرنے والے محور کے سرے ا اور ا ناقص کے راس
کہلاتے ہیں۔

۴۲۔ مسئلہ۔ محور ب ب چھوٹا ہے محور ا ا سے

اور ج ب = ج ا - ج س

دفعہ ۸ کی رو سے ج س ج = ز × ج لا = ج ا (بوجب نتیجہ ۳ دفعہ ۵)



اب قائم الزاویہ مثلث س ج ب میں

ضلع ج ب > وتر س ب = ج ا

اس لیے ب ب > ا ا

نیز ج ب = س ب - ج س = ج ا - ج س

نوٹ (۱) چونکہ ماسکوں میں سے گزرنے والا محور ا ا بڑا ہے محور ب ب کے

اس لیے ناقص میں ا ا کو محور اعظم اور ب ب کو محور اصغر

کہتے ہیں۔ - ترقیم - نیم محورِ اعظم ج ۱ کے طول کو بالعموم ا سے اور نیم محورِ اصغر

ج ب کے طول کو بالعموم ب سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

نوٹ (۲) چونکہ ج م = ز × ج ۱

اس لیے رشتہ ج ب = ج ۱ - ج س ہو جاتا ہے

ج ب = ج ۱ (۱ - ز)

یعنی اوپر کی ترقیم کے مطابق ب = ج ۱ (۱ - ز)

اس رشتہ کی مدد سے اگر مقادیر ا ب اور ز میں سے کوئی دو معلوم ہوں تو تیسری مقدار معلوم ہو سکتی ہے۔

نوٹ (۳) ۱ س × ۱ س = (ج ۱ - ج س) (ج ۱ + ج س)

= ج ۱ - ج س

= ج ب

نوٹ (۴) چونکہ بوجب نتیجہ ۱ دفعہ ۵

ج ۱ = ج س × ج ۱

اس لیے ج ب = ج س × ج ۱ - ج س

= ج س [ج ۱ - ج س]

= ج م × ج ۱

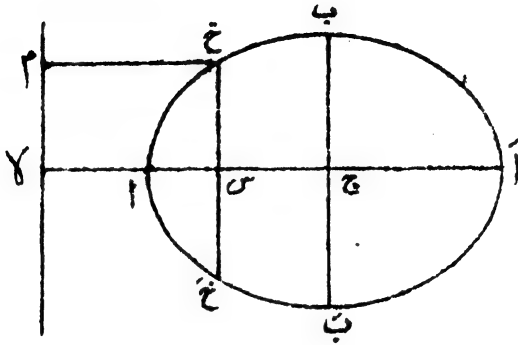
+ ۴۳۔ مسئلہ - ناقص کا نیم وترِ خاص، نیم محورِ اعظم اور

نیم محورِ اصغر کا تیسرا تناسب ہے یعنی $\frac{ج ۱}{ج ب} = \frac{ج ۱}{ج س}$

وترِ خاص کے ایک سرے خ سے مرتب پر عمود خ م نکالو۔

چونکہ خ ناقص پر کا نقطہ ہے اس لیے $ز = \frac{ج س}{ج م}$

$\frac{ج س}{ج ۱} =$



$$\begin{aligned} \text{یعنی } س \times خ \times ج &= ۱ \times ج \times س \times خ \\ ج \times س \times س &= ۴ \\ ج \times ج &= ۴ \end{aligned}$$

(موجب نوٹ ہم دفعہ ۴۲)

$$\text{اس لیے } \frac{ج \times ج}{س \times خ} = \frac{۱ \times ج}{ج \times ب}$$

نوٹ :- مسئلہ بالا میں ضمناً حاصل ہوا کہ نیم وترِ خاص $س \times خ = \frac{ج \times ج}{۱}$

اگر حسب معمول نیم وترِ خاص کے طول کو $ل$ سے تعبیر کیا جائے تو اس نتیجہ کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں

$$ل = \frac{ج \times ج}{۱}$$

مثلاً ۱۴

(۱) ناقص کے ایک محور پر کے کسی نقطہ سے محور کی مخالف جانبوں میں دو خط کھینچے گئے ہیں جو محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

ان خطوط کے طول مساوی ہیں۔ نیز اس کا عکس بیان کرو اور اسے بھی ثابت کرو۔

(۲) اگر دو مساوی ناقصوں کا مرکز ایک ہی ہو تو ثابت کرو کہ ان کے نقاط تقاطع دو علی القوائم قطروں کے سروں پر ہونگے۔

(۳) دفات ۷ اور ۸ کے نتائج کو استعمال کرنے کے بغیر ثابت کرو

کہ ناقص ٹکلیٹہ ان خطوط کے درمیان واقع ہے جو رأسوں ۱، ۲ میں سے محور ۱۱ پر عمود وار ہیں۔

(۴) اگر نقطہ ن ناقص پر رأس ۱ سے راس ۲ تک حرکت کرے تو ثابت کرو کہ ماسکی فاصلہ س ن کا طول س ۲ سے س ۱ تک بڑھتا ہے۔

(۵) اشارہ - اگر ن سے ۱ پر عمود ن ع ہو تو س ن = ز ع کا اور ع کا کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت ا کا ہے اور بڑی سے بڑی قیمت ا لا ہے۔

(۵) اگر ایک مکان فی اور ایک ناقص کے ماسکہ اور مرتب مشترک ہوں تو ثابت کرو کہ مکان فی ٹکلیٹہ ناقص کے باہر واقع ہوگا۔

(۶) ناقص کے محور اعظم کے سرے ۱، ۲ اور ماسکہ س کے مقام معلوم ہیں۔ ناقص کا خروج المرکز اور محور اصغر کا طول معلوم کرو۔

(۷) ثابت کرو کہ س م = ۱۱ - ب ب

(۸) اگر > س ب م قائم ہو تو ناقص کا خروج المرکز معلوم کرو۔

(۹) ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو محور اصغر کے ایک سرے ب میں سے گزرتا ہے اور محور اعظم کو ماسکہ س پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس دائرہ کا قطر = ب

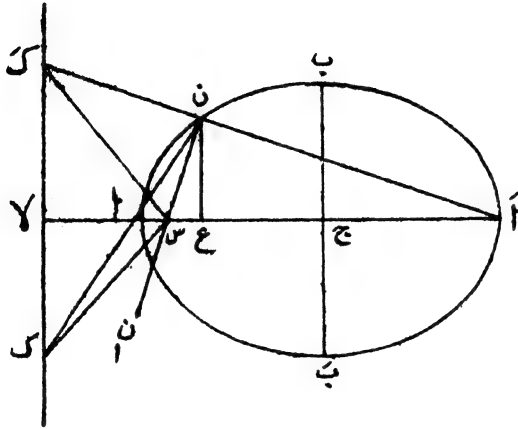
(۱۰) ناقص کے محور اعظم کے سرے ۱، ۲ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ ماسکہ س میں سے گزرنے والے وتر خاص کے سروں خ، خ کا طریق ایک مکانی ہے جس کا محور ۱۱ کے عمودی ناصف پر ہے۔

۴۴ - تحریف - اگر ناقص پر کے کسی نقطہ ن سے محور اعظم پر

عمود ن ع ہو تو ن ع کون کا معین کہتے ہیں۔

مسئلہ۔ اگر ناقص پر کے کسی نقطہ ن کا معین ن ع ہو تو

$$\frac{\text{ن ع}^۱}{۱۴ \times ۴۲} = \frac{\text{ج ب}^۲}{۲۱ \text{ ج}}$$



فرض کرو کہ ن ۱ اور ن ۲ ماسکس کے جواب کے مرتب سے بالترتیب
ک اور ک پر ملتے ہیں۔ س ک اور س ک کو ملاؤ اور ن ۱ میں کو ملا کر کسی
نقطہ ن تک خارج کرو۔

نتیجہ متشابه مثلثات ان ع اور اک ل سے

$$(۱) \quad \frac{\text{ک ل}}{۴۲} = \frac{\text{ن ع}}{۴۱}$$

نیز متشابه مثلثات ان ع اور اک ل سے

$$(۲) \quad \frac{\text{ک ل}}{۱۴} = \frac{\text{ن ع}}{۱۴}$$

اس لیے (۱) اور (۲) سے ملتا ہے

$$(۳) \quad \frac{\text{ک ل} \times \text{ک ل}}{۱۴ \times ۴۱} = \frac{\text{ن ع}}{۱۴ \times ۴۲}$$

نیز س ک اور س ک بالترتیب زاویوں | س ن | اور | س ن | کے منصف ہیں (بموجب دفعہ ۱۱)۔

اس لیے زاویہ ک س ک قائم ہے
لہذا ک لا × ک لا = س لا^۲ (۱۴)

اس لیے رشتہ (۳) ہو جاتا ہے

$$\frac{س لا^۲}{۱۸ \times ۱۸} = \frac{ن ع^۲}{۱۴ \times ۱۴}$$

لیکن $\frac{س لا^۲}{۱۸ \times ۱۸}$ ایک مستقل مقدار ہے۔

اس لیے $\frac{ن ع^۲}{۱۴ \times ۱۴}$ کی قیمت ن کے تمام مقاموں کے لیے مستقل ہے۔

اب اُس خاص صورت میں جبکہ نقطہ ن محور اصغر کے سرے ب پر منطبق ہو،

$$\frac{ن ع^۲}{۱۴ \times ۱۴} \text{ ہو جاتا ہے } \frac{ج ب^۲}{۱۴ \times ۱۴}$$

$$\frac{ج ب^۲}{۱۴ \times ۱۴} = \frac{ن ع^۲}{۱۴ \times ۱۴} \text{ پس ثابت ہوا کہ}$$

$$\text{نوٹ (۱) چونکہ } ۱۴ \times ۱۴ = (۱۴ - ج ع)(ج ع + ۱۴) = ج ا^۲ - ج ع^۲$$

$$\text{اس لیے مسئلہ بالا ہو جاتا ہے}$$

$$\frac{ج ا^۲ - ج ع^۲}{ج ا^۲ - ج ع^۲} = \frac{ج ب^۲}{ج ب^۲} \text{ یعنی } \frac{ج ا^۲ - ج ع^۲}{ج ا^۲ - ج ع^۲} = \frac{ج ب^۲}{ج ب^۲}$$

$$1 = \frac{ج ا^۲ - ج ع^۲}{ج ا^۲ - ج ع^۲}$$

$$\text{یعنی } \frac{ج ا^۲}{ج ا^۲ - ج ع^۲} + \frac{ج ع^۲}{ج ا^۲ - ج ع^۲} = 1 \text{ (۱)}$$

اب اگر ا ج ا اور ب ج ب کو حوالہ کے محور مانا جائے اور نقطہ

ن کے محدد (لا، ما) ہوں تو ج ع = لا (فضلیہ) اور ع ن = ما (معیّن)

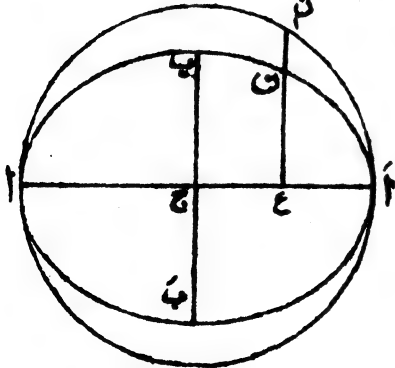
$$\text{اور نتیجہ بالا (۱) ہو جاتا ہے: } 1 = \frac{لا^۲}{ب ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب ا^۲} \text{ (۲)}$$

چونکہ ناقص پر کے کسی نقطہ ن کے ممدو (لا، ما) اس رشتہ (۲) کو پورا کرتے ہیں اس لیے یہ رشتہ یعنی $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$ ناقص کی مساوات، نوٹ (۲) اگر (لا، ما) ناقص $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$ پر کا ایک نقطہ ہو تو نقاط (لا، ما) اور (لا، ما) بھی ناقص کی مساوات کو پورا کرتے ہیں اس لیے یہ نقطے بھی ناقص پر واقع ہیں۔ اس سے ظاہر ہے کہ ناقص حوالہ کے دونوں محوروں ۱۲ اور ب کے لحاظ سے متشکل ہے۔ اس طریقہ سے اس امر کا متبادل ثبوت حاصل ہوتا ہے کہ ”ناقص بمحاطہ دو علی القوائم محوروں کے متشکل ہے۔“

نوٹ (۳) ناقص کی مساوات $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$ سے ظاہر ہے کہ لا کی عددی قیمت بڑی نہیں ہو سکتی اور ما کی عددی قیمت بڑی نہیں ہو سکتی ب سے یعنی ناقص کا کوئی نقطہ اس مستطیل کے باہر نہیں ہے جو 'ا' میں 'ا' پر عمود وار خطوط اور ب' میں سے ب' پر عمود وار خطوط کا پہنچنے سے بنتا ہے۔

۴۵۔ مسئلہ۔ اگر ناقص پر کے کسی نقطہ ن کا معین ن ع

ہو اور ع ن محدودہ 'ا' کے قطر پر کے دائرہ کون پر قطع کرے تو



$$\frac{ع}{ع} = \frac{ج}{۱}$$

دفعہ ۴۴ کی رو سے

$$\frac{ج}{۱} = \frac{ع}{ع \times ۱}$$

$$اور \quad ۱ \times ع = ع$$

$$\therefore \frac{ن ع^۲}{ن ع} = \frac{ج ب^۲}{ج ا}$$

$$اس لیے \frac{ن ع}{ن ع} = \frac{ج ب}{ج ا}$$

نوٹ - اوپر کے مسئلہ سے ظاہر ہے کہ اگر $ا ا$ قطر والے دائرہ پر کسی

نقطہ $ن$ کے معین $ن ع$ پر ایک نقطہ $ن$ ایسا لیا جائے کہ $\frac{ن ع}{ن ع} = \frac{ج ب}{ج ا}$ تو

$ن$ کا طریق وہ ناقص ہوگا جس کا محور اعظم $ا ا$ ہے اور محور اصغر $ب ب$ ہے۔

تعریفات (۱) ناقص کے محور اعظم $ا ا$ کے قطر پر کھینچے ہوئے دائرہ کو ناقص کا امدادی دائرہ کہتے ہیں۔ اس کی وجہ تسمیہ یہ ہے کہ امدادی دائرہ کی دو سے مندرجہ بالا نوٹ کے طریقہ کے مطابق ناقص حاصل ہو سکتا ہے۔

(۲) اگر خط $ع ن$ محور اعظم پر عمود ہو اور ناقص سے $ن$ پر امدادی دائرہ سے $ن$ پر ملے تو نقاط $ن$ اور $ن$ متناظر نقطے کہلاتے ہیں۔

امثلہ ۱۵

(۱) ناقص کے ایک نقطہ $ن$ کا معین $ن ع$ ہے۔ ثابت کرو کہ جیسے $ع$ رأس $ا$ سے مرکز $ب$ تک حرکت کرتا ہے معین $ن ع$ کی قیمت مسلسل بڑھتی ہے۔
(۲) اگر ناقص پر کسی نقطہ $ن$ سے محور اصغر $ب ب$ پر عمود $ن ع$ ہو تو

$$ثابت کرو کہ \frac{ن ع^۲}{ن ع} = \frac{ج ب^۲}{ج ا}$$

(۳) ایک محدود خط مستقیم ہے اور ایک متحرک نقطہ $ن$ سے

$ا ا$ پر عمود $ع ن$ ہے اگر $\frac{ن ع^۲}{ن ع} = \frac{ج ب^۲}{ج ا}$ ہمیشہ مستقل رہے تو ثابت کرو کہ

$ن$ کا طریق ایک ناقص ہے جس کا ایک محور $ا ا$ ہے۔

(۴) اگر ناقص پر کسی نقطہ $ن$ کے معین $ن ع$ پر نقطہ $ق$ اس طرح

ایسا جائے کہ $\frac{ع ق}{ع ن} =$ مستقل تو ق کا طریق ایک اور ناقص ہوگا۔

(۵) دفعہ ۲۲ کے مسئلہ کی مدد سے ثابت کرو کہ ناقص کے نیم وتر خاص کا

$$\text{طول} = \frac{۲}{۳}$$

(۶) ناقص پر کے کسی نقطہ کا معین ن ع ہے، ع ن محدود ہے

نقطہ ق ایسا لیا گیا ہے کہ $\frac{ع ق}{ع ن} = \frac{ج ۱}{ج ب}$ ، ثابت کرو کہ ق کا

طریق ایک دائرہ ہے جس کا قطر ۱ ہے۔

(۷) دائرہ (ج) کے ایک ثابت قطر ۱ پر دائرہ کے کسی نقطہ ن سے

ن ع عمود کھینچا گیا ہے۔ اور ع ن پر ایک نقطہ ن ایسا لیا گیا ہے کہ

$$\frac{ع ن}{ع ۱} = \frac{۳}{۵}$$

ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک ناقص ہے جس کا خروج مرکز $\frac{۳}{۵}$ ہے۔

(۸) دفعہ ۲۴ کے مسئلہ کی شکل میں اگر زاویہ ع ج ن = طہ تو

ثابت کرو کہ ناقص پر کے نقطہ ن کے عمود (۱ بم طہ ب جب طہ) ہیں۔

(۹) دفعہ ۲۵ کے مسئلہ کی مدد سے ثابت کرو کہ ناقص بلحاظ

ب ج ب کے (جو ج میں سے گزرتا ہے اور ۱ پر عمود وار ہے)

تشاکل ہے اور نیز اُس کا ایک اور ماسک اور اُس ماسک کے جواب کا

مرتب ہے۔

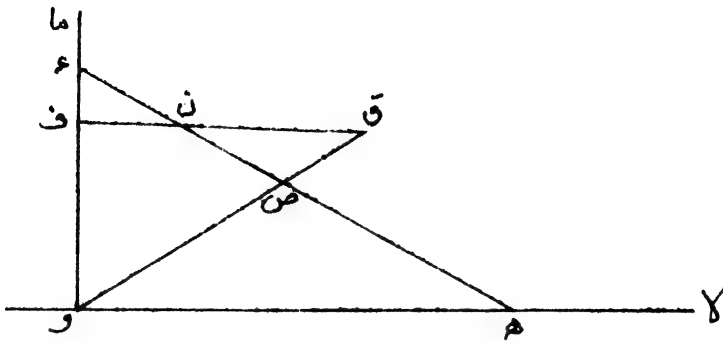
(۱۰) اگر ایک سلاخ ھ ع اس طرح حرکت کرے کہ اُس کے سرے

ھ اور ع بالترتیب دو علی القوائم سلاخوں ولا و ما پر رہیں تو ثابت کرو

کہ سلاخ پر کے کسی ثابت نقطہ ن کا طریق ایک ناقص ہوگا جس کے

نصف محوروں کے طول ن ھ اور ن ع ہیں۔

فرض کرو کہ سلاخ ھ ع کا وسطی نقطہ ص ہے،



ن سے وما پر عمود ن ف نکالو اور فرض کرو کہ ف ن اور و ص کا نقطہ تقاطع ق ہے ۔

ظاہر ہے کہ ص و = ص ہ اور ص ق = ص ن
اس لیے دق = دن ہ جو مستقل ہے ۔

اس لیے ق کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز و ہے اور نصف قطر ن ہ کے مساوی ہے ۔

نیز مشابہ مثلثات ن ف ء اور ق ف و میں

$$\frac{ن ف}{ق ف} = \frac{ن ء}{ق و} = \frac{ن ء}{ن ہ} \text{ جو مستقل ہے ۔}$$

اس لیے ن کا طریق ایک ناقص ہے جس کے نصف محوروں کے طول ن ہ اور ن ء ہیں ۔

نوٹ (۱) مندرجہ بالا طریقہ سے جیلی طور پر ایک سلاخ کی مسلسل حرکت سے ناقص مرتسم ہو سکتا ہے ۔ یہی ناقصی پرکار کا اصول ہے ۔

نوٹ (۲) مندرجہ بالا شکل میں نقطہ ن سلاخ پر ہ اور ء کے درمیان لیا گیا ہے ۔ اگر ن سلاخ مدودہ پر لیا جائے تو بھی طریق ناقص ہوگا ۔ طالب علم مناسب شکل کھینچ کر اس امر کی تصدیق کرے ۔

(۱۱) ناقص پر کوئی دو نقطے n اور n ہیں اور امدادی دائرہ پر ان کے متناظر نقطے n اور n ہیں۔ ثابت کرو کہ n اور n کا نقطہ تقاطع محورِ عظمِ ممدودہ پر ہے۔

(۱۲) سوال بالا کی مدد سے ثابت کرو کہ ناقص اور امدادی دائرہ پر کے متناظر نقطوں n اور n پر کے ماسات کا نقطہ تقاطع aa ممدودہ پر ہے۔

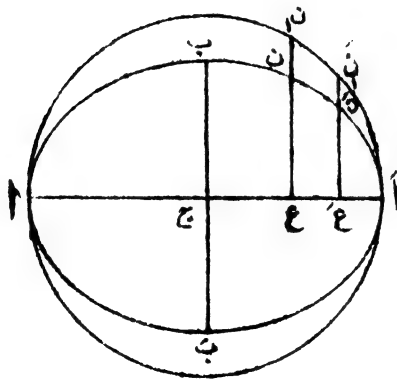
(۱۳) دائرہ کے متوازی وتروں کے نظام کے کسی ایک وتر qq پر

ایک نقطہ n ایسا لیا گیا ہے کہ $\frac{qn}{nn}$ مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ n کا طریق ایک ناقص ہے۔

[فرض کرو کہ دائرہ کا وہ قطر جو qq پر عمود ہے qq سے c پر

ملتا ہے، تب چونکہ $\frac{qn}{nn}$ مستقل ہے اس لیے $\frac{cn}{nc}$ بھی مستقل ہوگا

اس لیے n کا طریق ایک ناقص ہے جس کا امدادی دائرہ دیا ہوا دائرہ ہے [(۱۴) ناقص کے نیم محوروں کے طول aa اور b ہیں۔ ثابت کرو کہ ناقص کا



رقبہ πab ہے۔ ناقص پر ایک دوسرے کے قریب کے کسی دو نقطوں n اور n سے

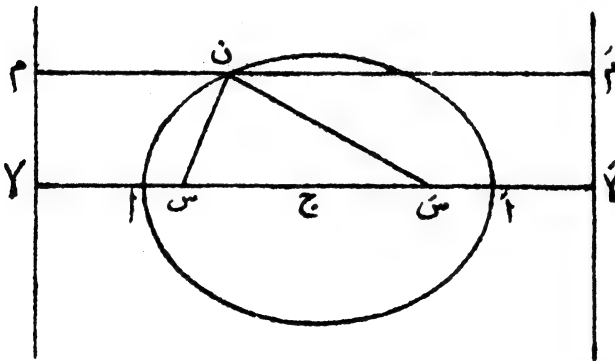
محورِ اعظم پر عمود ن ع اور د ن کا لواء فرض کرو کہ ح ن اور ع ن مسدودہ امدادی دائرہ سے بالترتیب ن اور د پر ملتے ہیں۔

$$\text{اب شکل ح ع ن ن کا رقبہ} = \frac{\text{ح ع ن}}{\text{ع ن}} = \frac{\text{ب}}{\text{ر}}$$

اب محورِ اعظم پر عمود وار نسبت سے خطوط کھینچ کر ناقص اور امدادی دائرہ کو ایسی بے شمار متناظر ٹیٹیوں میں تقسیم کرو جن میں سے ہر ایک کی چوڑائی (شلاخ ع) بہت چھوٹی ہو۔ جیسا کہ اوپر بتایا جا چکا ہے۔ ناقص کی ہر ٹیٹی کے رقبہ کو امدادی کی متناظر ٹیٹی کے رقبہ کے ساتھ نسبت $\frac{\text{ب}}{\text{ر}}$ ہے، نیز ناقص کی جملہ ٹیٹیوں کا مجموعہ ناقص کا رقبہ ہے اور امدادی دائرہ کی متناظر ٹیٹیوں کا مجموعہ امدادی دائرہ کا رقبہ ہے۔

$$\text{اس لیے ناقص کا رقبہ} = \frac{\text{ناقص کا رقبہ}}{\text{امدادی دائرہ کا رقبہ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ر}}$$

یعنی ناقص کا رقبہ = $\frac{\text{ب}}{\text{ر}} \times$ امدادی دائرہ کا رقبہ = $\frac{\text{ب}}{\text{ر}} \times \pi \times \text{ر}^2 = \pi \times \text{ر} \times \text{ب}$ مسئلہ ۴۶۔ ناقص پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے اور محورِ اعظم کے مساوی ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ ناقص پر کا کوئی نقطہ ن ہے، ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$$\text{ن س} + \text{ن س} = \text{ا ا}$$

ن میں سے م کے متناظر مرتب پر عمود ن م اور م کے متناظر مرتب پر عمود
ن م نکالو۔ تب م ن م خط مستقیم ہوگا۔
ناقص کی تعریف کے بموجب

$$ن م \times ز = ن م$$

$$اور \quad ن م \times ز = ن م$$

$$اس لیے \quad ن م + ن م = ز (ن م + ن م)$$

$$ن م \times ز = ن م \times ز$$

$$ن م \times ز = ن م \times ز$$

$$= ۲ ج ۱ (بوجب دفعہ ذریعہ ۲)$$

$$= ۱۱$$

نوٹ۔ اس مسئلہ کی مدد سے ایک نقطہ کی مسلسل حرکت سے ناقص مرتسم
کرنے کا سندرجہ ذیل جہلی طریقہ حاصل ہوتا ہے۔

محدود طول والی ایک بے پیماس رسی کے سروں کو دو ثابت نقطوں میں اور
میں پر کی دو کھوپٹیوں کے ساتھ باندھ دو۔ ایک پینسل کو اس طرح حرکت دو کہ
پینسل کی نوک سے رسی ہمیشہ تنی رہے، تب پینسل کی نوک ایک ناقص مرتسم
کریجی، کیونکہ اگر پینسل کی نوک کا کوئی ایک مقام ن ہو تو ن م + ن م
= رسی کا طول جو مستقل ہے۔ اس لیے ن کا طریق ایک ناقص ہے جس کے واسطے
میں اور میں ہیں اور جس کے محور اعظم کا طول رسی کے طول کے مساوی ہے۔

امثلہ ۱۱

(۱) اگر ناقص کی سطح میں کوئی نقطہ ق ہو تو ثابت کرو کہ ق م + ق م

بڑا ہوگا ۱۱ سے، اگر ق ناقص کے باہر ہو اور چھوٹا ہوگا ۱۱ سے، اگر ق
ناقص کے اندر ہو۔

(۲) ن ج ن ناقص کا کوئی قطر ہے، ثابت کرو کہ ن م + ن م

مستقل ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ ناقص کا محور اعظم ناقص کا سب سے بڑا وتر ہے۔

[فرض کرو کہ ناقص کا کوئی وتر n ہے،

تب $n \times n > س \times س + س \times س$ نیز $n > س \times س + س \times س$ سے

اس لیے $n \times n > (س \times س + س \times س) + (س \times س + س \times س) = ۲۱ + ۲۱ = ۴۲$

اس لیے $n > ۲۱$]

(۴) ایک دائرہ دوسرے دائرہ کے بالکل اندر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ

اس نقطہ کا طریق جو دونوں دائروں کے محیطوں سے مساوی الفاصل ہو ایک ناقص ہے۔

(۱) اشارہ۔ دائروں کے مرکزوں سے متحرک نقطہ کے فاصلوں کا مجموعہ دائروں کے نصف قطروں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

(۵) اگر ناقص پر کا ایک نقطہ ایک ماسک اور محور اعظم کا طول معلوم ہوں تو ثابت کرو کہ دوسرے ماسک کا طریق ایک دائرہ ہے۔

(۶) سوال ۵ میں ثابت کرو کہ ناقص کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔

(۷) دونوں ناقصوں کا ایک ماسک مشترک ہے۔ اور ان کے محور اعظم کے طول

مساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ ناقص دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کر سکتے۔

(۸) ثابت کرو کہ ناقص کے کسی نقطہ پر ماسکوں کو ملانے والے خط $س \times س$ کے

محاذی بننے والا زاویہ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ نقطہ مذکور محور اصغر کے کسی سرے پر ہو۔

(۹) ناقص پر کوئی نقطہ n ہے، ثابت کرو کہ $س \times س \times س$ کا

خارجی ناصف ناقص کو کرر قطع نہیں کر سکتا۔ اس سے متنبط کرو کہ $س \times س \times س$

کا خارجی ناصف نقطہ n پر ناقص کا ماسک ہے۔

(۱۰) اگر مثلث $س \times س \times س$ کا اندرونی دائرہ $س \times س$ کو چر مس کرے تو

ثابت کرو کہ $س \times س$ کا طول مستقل ہے۔

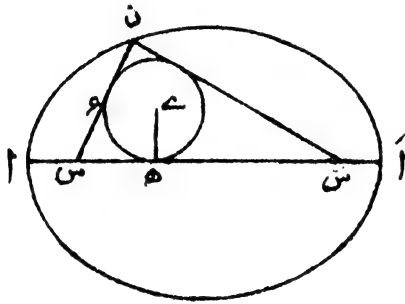
(۱۱) اگر $س \times س \times س$ کا اندرونی دائرہ $س \times س$ کو $س$ پر مس کرے تو ثابت کرو کہ

$س \times س = ۵۱$

(۱۲) ایک دائرہ دوسرے دائرہ کے بالکل اندر واقع ہے۔ اُس دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو جو ان دونوں دائروں کو مس کرتا ہے (دیکھو سوال ۴ مسئلہ ۱۲ا)
 (۱۳) ناقص پر کوئی نقطہ ن ہے، ثابت کرو کہ مثلث س ن س کے اندرونی دائرہ کے مرکز کا طریق ایک ناقص ہے۔

[فرض کرو کہ مثلث س ن س کا اندرونی دائرہ ن س کو ع پر اور س ن کو ہ پر مس کرتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ مثلث س ن س کا اندرونی مرکز ے ہے چونکہ ن س + ن س = ۱۲ اور س س = ۲ اُز، اس لیے مثلث س ن س کا احاطہ

$$= \frac{12(1+z)}{(1-z)(1-b)(1-g)} \triangle$$



اور $r = \frac{\triangle}{s}$ سے حاصل ہوتا ہے کہ مثلث س ن س کے اندرونی دائرہ کا

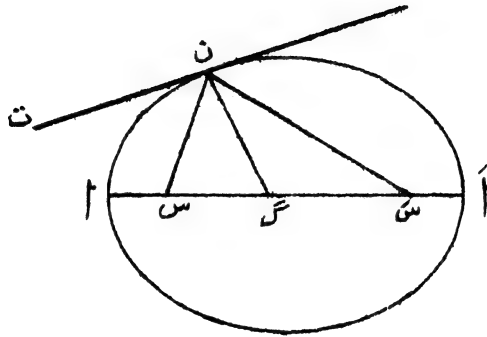
$$\text{نصف قطر } ے = \frac{\text{مثلث س ن س کا رقبہ}}{12(1+z)}$$

$$\frac{12(1+z) \times ے \times س \times ن}{12(1+z)} = \frac{ے \times س \times ن}{12(1+z)}$$

$$\text{اس لیے } ے \times س \times ن = \frac{ے \times س \times ن}{12(1+z)} = \frac{ے(1-z)}{12(1+z)} = \frac{ے(1-z)}{12(1+z)} \text{ جو مستقل ہے۔}$$

اس لیے مے کا طریق ایک ناقص ہے جس کے راس س اور س ہیں [

۷۴۔ مسئلہ۔ ناقص پر کے کسی نقطہ ن پر کے ماس اور عماد ناویہ س ن س کے بالترتیب خارجی اور داخلی ناصف ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ ناقص کے کسی نقطہ ن پر کا عماد س س سے گ پر ملتا ہے۔
دفعہ ۱۹ کی رو سے

$$\text{س گ} = \text{ز} \times \text{س ن اور س گ} = \text{ز} \times \text{س ن}$$

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{س ن}}{\text{س ن}} = \frac{\text{س گ}}{\text{س گ}}$$

اس لیے ن گ زاویہ س ن س کا ایک مُنصف ہے۔

اب ہم یہ بتائینگے کہ ن گ زاویہ س ن س کا داخلی مُنصف ہے۔
چونکہ س گ = ز × س ن، اس لیے س گ کی بڑی سے بڑی

قیمت ز × س ن ہے

$$\text{یعنی س گ} > \text{ز} \times \text{ا} = \text{س ن}$$

اس لیے نقطہ گ، س اور س کے درمیان واقع ہے۔

ناقص کے محور اعظم پر عمود ہے۔

(۲) ناقص کے نقطہ N پر کا ماس ماسکوں میں اور M کے متناظر مرتبوں سے بالترتیب E اور E' پر ملتا ہے اور E اور E' سے S N پر عمود نکالے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان عمودوں کے پائیس کا درمیانی فاصلہ محور اعظم کے طول کے مساوی ہے۔

(۳) ناقص کے کسی نقطہ N پر کے ماس پر ماسکوں میں اور M سے عمود M' M' نکالے گئے ہیں۔ اور N E محور A A' پر عمود ہے۔ ثابت کرو کہ صاع M' کا نصف E N ہے۔

(۴) ناقص کے کسی نقطہ N پر کے ماس پر ماسکوں میں سے عمود M' M' نکالے گئے ہیں۔ اور M' N ایک دوسرے کو C پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ ماس} = \text{ماس}$$

$$(۲) \text{ ماس} = \text{ماس}$$

$$\text{اور } (۳) \text{ ماس} = \text{ماس}$$

نوٹ - نتیجہ (۱) سے ظاہر ہے کہ N پر کے ماس میں ماسکوں

کا خیال ق ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ ناقص کے کسی ماس میں ایک ماسکوں کے خیال کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز دوسرا ماسکوں میں ہے، اور نصف قطر محور اعظم کے مساوی ہے۔

(۶) ناقص کا ایک ماسکوں، ناقص پر کا ایک نقطہ، محور اعظم کا طول اور ایک ماس دیے گئے ہیں۔ ناقص کو مرتسم کرو۔

! اشارہ - چونکہ ناقص کا ایک ماسکوں، ناقص پر کا ایک نقطہ اور محور اعظم کے طول معلوم ہیں، اس لیے دوسرے ماسکوں کا طریق ایک دائرہ ہوگا۔ نیز چونکہ ناقص کا ایک ماسکوں، ایک ماس اور محور اعظم کا طول معلوم ہیں، اس لیے دوسرے ماسکوں کا طریق ایک دائرہ ہوگا (دیکھو سوال ۴ نتیجہ ۲)۔ ان دو دائروں کے تقاطع سے دوسرا ماسکوں حاصل ہوگا۔

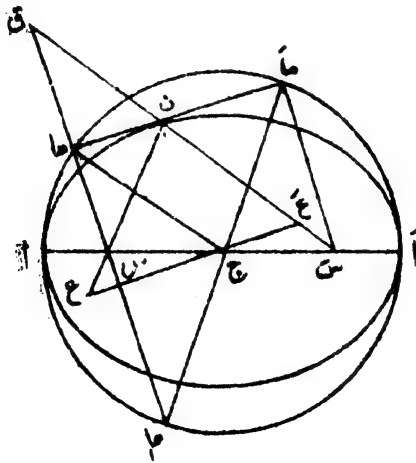
(۷) ناقص کا ایک ماسکوں، دو ماس اور محور اعظم کا طول معلوم ہیں، ناقص کو مرتسم کرو۔

- (۸) ناقص کا ایک ماسکہ معلوم ہے اور ناقص ایک دیے ہوئے خط کو ایک دیے ہوئے نقطہ پر مس کرتا ہے، دوسرے ماسکہ کا طریق معلوم کرو۔
 (۹) سوال بالا ۸ میں ناقص کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔
 (۱۰) ناقص کا ایک ماسکہ، اس کے جواب کا مرتب اور ایک ماسہ معلوم ہیں۔ ناقص کا دوسرا ماسکہ معلوم کرو۔
 (۱۱) ناقص کے نقطہ ن پر کا عماد محور اعظم سے گزرتا ہے اور محور اصغر سے گزرتا ہے،

ثابت کرو کہ مثلثات س ن گ اور گ ن س متشابه ہیں۔

[دیکھو دفعہ ۴ کے مسئلہ کی فرغا]

- (۱۳) سوال بالا (۱۱) میں ثابت کرو کہ س ن \times س ن = ن گ \times ن گ
 ۴۸۔ اگر ناقص کے ماسکوں س، س سے کسی نقطہ ن پر کے ماس
 پر عمود س، م، م، م نکالے جائیں تو عمودوں کے پائیں م اور م، امدادی
 حائرہ پر واقع ہونگے۔ نیز س م \times م م = ج ب



فرض کرو کہ س م اور م ن ممدودہ کا نقطہ تقاطع ق ہے،

ج ما کو ملاؤ

تب مثلثات ن ماس اور ن ماقی میں

$$\angle \text{سن ماس} = \angle \text{ق ن ماس}$$

کیونکہ ن پر کا ماس ن ماس زاویہ سن ن ماس کا خارجی نصف ہے۔

نیز $\angle \text{ن ماس} = \angle \text{ن ماقی}$ (کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے)

اور ن ماس دونوں مثلثات میں مشترک ہے

اس لیے مثلثات ن ماس اور ن ماقی آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں۔

اس لیے سن ماس = ق ماس اور سن ن = ق ن۔

$$\text{پس سن ق} = \text{سن ن} + \text{ن ق} = \text{سن ن} + \text{ن ماس} = ۱۲۰^\circ = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ$$

چونکہ مثلث سن ق میں سن سن کا وسطی نقطہ ج ہے اور سن ق کا وسطی نقطہ ماس ہے

$$\text{اس لیے ج ماس} = \frac{۱}{۲} \text{سن ق} = ۶۰^\circ$$

اس لیے ماس دائرہ پر واقع ہے جس کا مرکز ج ہے اور نصف قطر ج ہے

یعنی ماس امدادی دائرہ پر واقع ہے۔

اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ماس بھی امدادی دائرہ پر واقع ہے

اب ماس کو اتنا خارج کرو کہ وہ امدادی دائرہ سے گزر کر ماس پر ملے۔

چونکہ ماس ماس امدادی دائرہ کا ایک قطر ہے اس لیے $\angle \text{ماس ماس ماس}$ قائمہ ہے

لیکن بموجب عمل $\angle \text{ماس ماس ماس}$ بھی قائمہ ہے

اس لیے ماس ماس ایک خط مستقیم ہے

اب مثلثات ج سن ماس اور ج ماس ماس میں

$$\text{ج سن} = \text{ج ماس}$$

$$\text{ج ماس} = \text{ج ماس}$$

$$\text{اور } \angle \text{سن ج ماس} = \angle \text{ماس ج ماس}$$

اس لیے مثلثات ج سن ماس اور ج ماس ماس آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں

اس لیے سن ماس = ماس ماس

$$\begin{aligned} \text{پس } س \text{ ما} \times س \text{ ما} &= س \text{ ما} \times س \text{ ما} \\ &= ۱ \times س \text{ ا} = ج \text{ ب} \end{aligned}$$

(بوجب دفعہ ۴۲ - نوٹ ۳)

فرع (۱۱)۔ اگر مرکز ج میں سے ایک خط کھینچا جائے جو ن پر کے ماس کے متوازی ہو اور ن میں سے ممدودہ بشرط ضرورت بالترتیب

$$\begin{aligned} ع' غ' پر ملے تو ن ع &= ن غ' = ج ا \\ \text{چونکہ ج ما} // \text{ع ن اور ن ما} // \text{ع ج} \\ \text{اس لیے ن ما ج ع متوازی الاضلاع ہے} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{یعنی ن غ} &= ج ما = ج ا \\ \text{اسی طرح سے ن ع} &= ج ا \end{aligned}$$

فرع (۲)۔ اگر ایک ثابت نقطہ میں سے ایک متغیر خط پر کے عمود کا پائیں ہمیشہ ایک دائرہ پر واقع ہو جس کے اندر میں واقع ہے تو متغیر خط کا لفاف ایک ناقص ہوگا جس کا ایک ہاسکہ میں ہے۔

فرع (۳)۔ اگر ایک متغیر خط پر خط کی ایک ہی جانب کے دو ثابت نقطوں سے نکالے ہوئے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہو تو متغیر خط کا لفاف ایک ناقص ہوگا جس کے ماسکے دیے ہوئے ثابت نقطے ہیں۔

امثلہ ۱۸

(۱) مسئلہ بالا کی شکل میں ثابت کرو کہ $س ع = س ع'$ نیز ثابت کرو کہ مثلثات ج س ع اور ج س ع' کے حائل دائرے مساوی ہیں۔

(۲) ناقص کے کسی نقطہ ن پر کے ماس پر مرکز ج سے عمود نکالا گیا ہے اور یہ عمود میں ن ممدودہ سے ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز میں ہے اور نصف قطر ج ا کے

مساوی ہے -

(۳) ناقص کا ایک ماسکہ محمد اعظم کا طول اور ناقص کے دو ماس دیئے گئے ہیں ناقص کو مرتسم کرو۔

[اشارہ] - اگر دیئے ہوئے ماسکہ سے ایک دیئے ہوئے ماس پر عمود سے ما ہو تو ما ج = ج ۱ جس کا طول دیا گیا ہے۔ اس لیے ج ایک دائرہ پر واقع ہے جس کا مرکز ما ہے اور نصف قطر ج ۱ کے مساوی ہے اسی طرح سے دوسرے ماس کی مد سے چل ہوتا ہے کہ مرکز ایک اور دائرہ پہ ہے، ان دائروں کے تقاطع سے ناقص کا مرکز معلوم ہوتا ہے۔

(۴) ناقص کا ایک ماسکہ ایک ماس اور خروج مرکز معلوم ہیں ثابت کرو دوسرے ماسکہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔

[اشارہ] - دفعہ بالا کی ترقیم کے مطابق ج س = ز x ج ۱

= ز x ج ما یعنی $\frac{ج س}{ج ما} = ز$ جو دیا گیا ہے اس لیے ج کا طریق

ایک دائرہ ہے اور چونکہ س س = ۲ ج س، اس لیے س کا طریق بھی ایک دائرہ ہے۔

(۵) دفعہ بالا کی شکل میں ثابت کرو کہ چار ضلعی س ماس ماس کا احاطہ اعظم ہوگا جبکہ $ح ما ج ما قائم ہو$ ۔

[حل] - چونکہ س س مستقل ہے اس لیے س ماس ماس کا احاطہ اعظم ہوگا جبکہ س ما + ما ما + ماس اعظم ہو۔ یعنی جبکہ س ما + ما ما + س ما اعظم ہو یعنی جبکہ قائم الزاویہ مثلث ما ما کے ضلعوں ما ما اور ما ما کا مجموعہ اعظم ہو۔ اب چونکہ قائم الزاویہ مثلث ما ما کا وتر ما ما مستقل ہے اس لیے ما ما + ما ما اعظم ہوگا جبکہ مثلث نمبر متساوی الساقین ہو۔ اس صورت میں ج ما عمود ہوگا وتر ما ما پر یعنی $ح ما ج ما قائم ہوگا$ ۔

(۶) ناقص کا کوئی ماس امدادی دائرہ سے ما اور ما پر ملتا ہے

(دیکھو شکل مسئلہ بالا) ثابت کرو کہ \triangle س ماما اور \triangle س ماما دونوں قائمے ہیں۔

(۷) اگر ایک زاویہ قائمہ کا رأس ایک ثابت دائرہ پر حرکت کرے اور ایک ساق دائرہ مذکور کے اندر کے ایک ثابت نقطے سے گزرے تو ثابت کرو کہ دوسری ساق ایک ثابت ناقص کو مس کرے گی (دیکھو فرع (۲)۔

(۸) ناقص کا محور اعظم AA' اور ناقص کا ایک تماس معلوم ہیں۔ ناقص کو منقسم کرو۔

(۹) ناقص پر کا کوئی نقطہ N ہے ثابت کرو کہ N کے قطر پر کھینچا ہوا دائرہ امدادی دائرہ کو مس کرتا ہے۔

[اشارہ :- اگر N پر کے تماس پر S سے عمود SN ہو تو J منصف کرتا ہے SN کی]

(۱۰) ناقص کا ماسک، ایک تماس اور محور اعظم کا طول معلوم ہیں مرکز کا طریق معلوم کرو۔

(۱۱) ناقص کے دونوں ماسکے اور ایک تماس دیے گئے ہیں۔ ناقص کو منقسم کرو۔

(۱۲) ایک بیرونی نقطہ سے ناقص کے تماسات کا جوڑا کھینچنے کے لیے مندرجہ ذیل عمل کا ثبوت ہم پہنچاؤ۔

فرض کرو کہ دیا ہوا بیرونی نقطہ T ہے۔ T سے N کے قطر پر دائرہ کھینچو جو امدادی دائرہ سے M ، M' پر ملے۔ تب T سے M اور T سے M' کے خطوط ناقص کے مطلوبہ تماسات ہوں گے۔

(۱۳) ناقص پر کا کوئی نقطہ N ہے۔ مرکز J میں سے خطوط JM ، JN اور SN کے متوازی کھینچے گئے ہیں اور N پر کے تماس سے M اور M' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ $JM = JN = JN'$ ۔

(۱۴) ناقص کے تماسات کھینچو جو ایک دیے ہوئے خط کے متوازی ہوں۔

[اشارہ]۔ ماسکوں سے دیے ہوئے خط پر عمود نکالو فرض کرو کہ یہ عمود امدادی دائرہ سے محورِ اعظم کی ایک ہی جانب نقطوں مآ اور مآ پر ملتے ہیں۔ تب مآ مآ ناقص کا ایک ماس ہوگا جو دیے ہوئے خط کے متوازی ہے۔ اسی طرح سے عمودوں اور امدادی دائرہ کے اُن نقاطِ تقاطع کی مدد سے جو محورِ اعظم کی دوسری جانب ہیں دوسرا ماس بھی کھینچ سکتا ہے۔]

(۱۵) دو مساوی ناقصوں کے مرکز مشترک ہیں۔ ان ناقصوں کے مشترک مماسات کھینچو۔

[اشارہ]۔ چونکہ ناقص مساوی ہیں اور مرکز منطبق ہیں اس لیے دونوں ناقصوں کا ایک ہی امدادی دائرہ ہے۔ ان ناقصوں کے مشترک مماسات دیے ہوئے ناقصوں کے ماسکوں میں سے دو کو ملانے والے چار خطوط اور امدادی دائرہ کے نقاطِ تقاطع میں سے گزرتے ہیں۔]

(۱۶) ناقص کا ایک ماسک، ایک ماس اور محورِ اصغر کا طول معلوم ہیں۔ دوسرے ماسک کا طریق معلوم کرو۔

(۱۷) ایک ثابت نقطہ میں پر ایک دیے ہوئے دائرہ (ج) کے ایک متغیر وترن کے مجاذی ہمیشہ زاویہ قائمہ بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ن ایک ایسے ناقص کو لف کرتا ہے جس کے ماسکے میں اور ج ہیں۔

(۱۸) ناقص کا ایک ماس امدادی دائرہ سے مآ، مآ پر ملتا ہے اور ایک اور ماس مآ مآ کو پر عمود وار قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ $و مآ \times و مآ = ج بآ$ [اشارہ]۔ س مآ اور س مآ دونوں مآ مآ پر عمود وار ہیں۔

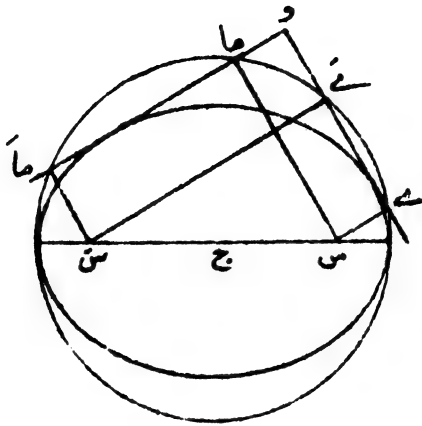
اگر و میں سے گزرنے والا دوسرا ماس امدادی دائرہ سے مے، مے پر ملے تو س مے اور س مے دونوں مے مے پر عمود وار ہوں گے۔

تب $و مآ \times و مآ = س مے \times س مے = ج بآ$

(۱۹) سوال بالا (۱۸) میں ثابت کرو کہ $ج ڈ = ج آ + ج بآ$

[اشارہ]۔ $و مآ \times و مآ = ج بآ$

یعنی $ج بآ = ماس ماس کا مربع جو و سے امدادی دائرہ تک کھینچا جائے۔$



یعنی ج ب ا = ج د - ج ا یعنی ج د = ج ا + ج ب
 نوٹ - اس سوال سے ظاہر ہے کہ ناقص کے دو علی القوائم حاسوں کے
 نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ج ہے اور جس کے نصف قطر کا
 مربع نیم محور اعظم اور نیم محور اصغر کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ اس
 دائرہ کو ناقص کا مرتب دائرہ کہتے ہیں۔
 ۴۹ - ناقص کے متعلق بعض مسائل ایسے ہیں جو قائم تطلیل کی
 مدد سے بہ آسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔ اس لیے اب ہم قائم تطلیل کے
 متعلق چند اساسی مسئلے ثابت کرینگے اور بعد ازاں ان مسئلوں کی مدد
 سے ناقص کے مزید خواص حاصل کرینگے۔

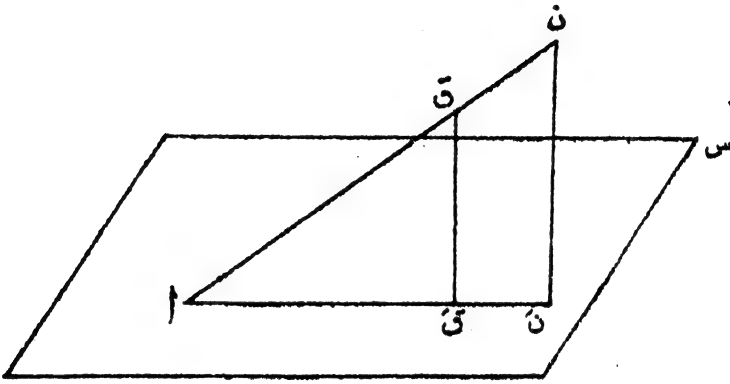
۵۰۔ تعریفات -

(۱) اگر کسی نقطہ ن سے ایک ثابت سطح مستوی میں پر عمود
 ن ن نکالا جائے تو عمود کے پاؤں ن کو نقطہ ن کا قائم ظل کہتے ہیں اور سطح
 کو سطح تطلیل کہتے ہیں۔

(۲) اگر نقطہ ن ایک خط (مستقیم یا منحنی) مرتسم کرے تو ایک وی ہونی
مستوی سطح میں پر ن کا ظل ایک اور خط (مستقیم یا منحنی) مرتسم کر چکا جس کو
دیے ہوئے خط کا قائم ظل کہتے ہیں۔

(۳) اگر دی ہونی شکل ایک مستوی سطح میں واقع ہو تو اس سطح اور سطح تطلیل کے
خط تقاطع کو محور تطلیل کہتے ہیں۔

۵۱۔ قائم تطلیل کے مشہور خواص حسب ذیل ہیں :-
(۱) خط مستقیم کا ظل خط مستقیم ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ دیا ہوا خط مستقیم ن ا سطح تطلیل س سے نقطہ ا پر ملتا ہے۔
ن سے سطح میں پر عمود ن ن نکالو۔ تب مستوی سطح ان ن سطح تطلیل
س پر عمود وار ہوگی۔ خط مستقیم ن ا کے کسی اور نقطہ ق سے سطح س پر
عمود ق ق نکالو۔ تب ن ن اور ق ق ہم سطح ہونگے۔ اس لیے
عمود ق ق مستوی سطح ن ا میں واقع ہوگا۔ اس لیے نقطہ ق کا
قائم ظل ق سطوں س اور ن ا کے خط تقاطع پر یعنی خط مستقیم
ان پر واقع ہوگا۔

شرح (۱) دو خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع کا ظل ان خطوط کے

نَ قِ سَ ا کھتے ہیں۔ اس لیے حصوں ن قِ قِ سَ کو آپس میں وہی نسبت ہے جو ان حصوں کے طولوں نَ قِ قِ سَ کو آپس میں ہے۔
نوٹ (۱) کسی خط اور اس خط کے ظل کے درمیانی زاویہ کو خط اور سطح تنظیم کا درمیانی زاویہ کہتے ہیں۔

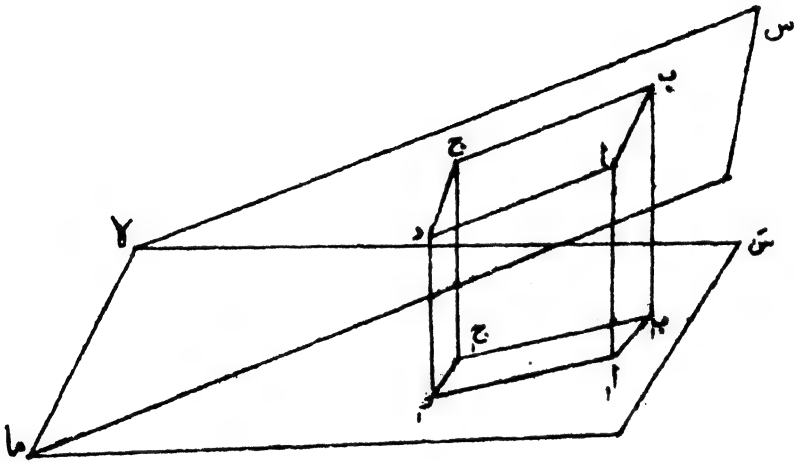
فرض کرو کہ محدود خط ا ب کا ظل آ ب ہے۔ نیز فرض کرو کہ ا ب اور آ ب کا درمیانی زاویہ ط ہے۔ تب آ ب = ا ب × جم ط
اس نتیجہ کی مدد سے بھی مندرجہ بالا مسئلہ (ج) حاصل ہو سکتا ہے۔
نوٹ (۲) اگر ایک خط سطح تنظیم کے متوازی ہو تو اس کے ظل کا طول خط کے طول کے مساوی ہوگا۔

(د) متوازی خطوط کے طولوں کو آپس میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ان کے طولوں کے طولوں کو آپس میں ہے۔
فرض کرو کہ ا ب اور ج د باہم متوازی ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ان کے ظل آ ب اور ج د ہیں۔ اگر ا ب اور آ ب کا درمیانی زاویہ ط ہو تو ج د اور ج د کا درمیانی زاویہ بھی ط ہوگا۔

اس لیے آ ب = ا ب جم ط اور ج د = ج د جم ط
اس لیے آ ب : ج د = ا ب : ج د جو ثابت کرنا تھا۔

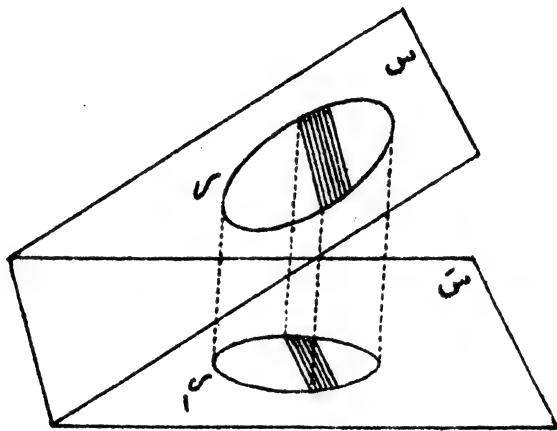
(ه) کسی منحنی کے عکس کا ظل منحنی کے ظل کا عکس ہوتا ہے۔
فرض کرو کہ ایک منحنی پر دو قریب کے نقطے ن اور ق ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ن اور ق کے ظل بالترتیب نَ اور قِ ہیں۔ چونکہ ن ق کا طول ن ق کے طول سے بڑا نہیں ہو سکتا۔ اس لیے جوں جوں نقطہ ق منحنی پر حرکت کر کے نقطہ ن کے بے حد قریب آتا ہے نقطہ قِ منحنی کے ظل پر حرکت کر کے نقطہ نَ کے بے حد قریب آ جاتا ہے اور انتہا میں جب نقطہ ق نقطہ ن پر منطبق ہوتا ہے تو نقطہ قِ نقطہ نَ پر منطبق ہو جاتا ہے۔ اس لیے منحنی کے نقطہ ن پر کے عکس کا ظل منحنی کے ظل کے نقطہ نَ پر کا عکس ہے۔
نیز ضمناً یہ بھی ثابت ہوا ہے کہ منحنی اور اس کے کسی عکس کے نقطہ تماس کا ظل

منحنی کے ظل اور عکس کے ظل کا نقطہ تماس ہوتا ہے۔
 (و) اگر ایک مستوی سطح میں پر ایک رقبہ سر ہو اور اس کا ظل
 ایک اور مستوی سطح میں پر نکالا جائے تو ظل کا رقبہ سر = سر \times حجم طہ
 جہاں سطحوں میں اور میں کا درمیانی زاویہ طہ ہے۔
صورت اول۔ فرض کرو کہ دیا ہوا رقبہ ایک مستطیل اب ج د
 ہے جس کا ایک ضلع اب محورِ تطیل کے متوازی ہے اور دوسرا ضلع ب ج
 لازماً محورِ تطیل پر عمود وار ہے۔



فرض کرو کہ اب ج د کا ظل اب ج د ہے۔
 تب اب ج د محورِ تطیل کے متوازی ہوگا اور ب ج محورِ تطیل پر عمود وار ہوگا۔
 اس لیے ظل اب ج د بھی ایک مستطیل ہے۔
 نیز اب ج د = اب اور ب ج د = ب ج حجم طہ کیونکہ ب ج اور ب ج کا
 درمیانی زاویہ طہ ہے۔
 اس لیے ظل اب ج د کا رقبہ سر = اب \times ب ج حجم طہ = سر حجم طہ

صورت دوم - فرض کرو کہ سطح S پر کوئی رقبہ s دیا گیا ہے جس کا ظل سطح تظیل s' پر ہے -
فرض کرو کہ سطحوں S اور s' کا درمیانی زاویہ θ ہے -



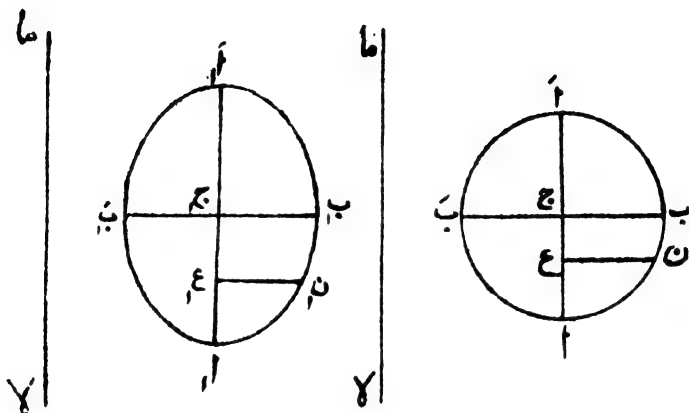
رقبہ s کو محور تظیل کے متوازی خطوط کے ذریعے ایسی بے شمار پٹیوں میں تقسیم کر دجن میں سے ہر ایک کی چوڑائی بہت چھوٹی ہو - چونکہ ہر پٹی کی چوڑائی بہت چھوٹی ہے اس لیے ہر ایک پٹی کو مستطیل مانا جا سکتا ہے - ان پٹیوں میں سے کسی ایک پٹی کے ظل کا طول اس پٹی کے طول کے مساوی ہوگا اور
ظل کا عرض = اس پٹی کا عرض \times جم θ

اس لیے کسی پٹی کے ظل کا رقبہ = پٹی کا رقبہ \times جم θ
اس لیے ظل کی تمام پٹیوں کا مجموعی رقبہ = سطح S پر کی پٹیوں کے رقبوں کا مجموعہ \times جم θ یعنی ظل کا رقبہ s' = دیا ہوا رقبہ s \times جم θ -

۵۲ - مسئلہ - دائرہ کا قائم ظل ناقص ہوتا ہے -

فرض کرو کہ سطح S پر کسے دائرہ (ج) کا ظل سطح تظیل s' پر نکالا گیا ہے دائرہ کے قطر a ج a اور b ج b کے مابین جو بالترتیب محور تظیل کے متوازی

اور اس پر عمود وار ہوں۔ فرض کرو کہ ج، ا، ب، ب کے قتل بالترتیب ج، ا، ا، ا، ب، ب، ب ہیں۔ [وضاحت کی خاطر اصل شکل اور اس کا نقل ذیل میں علیحدہ علیحدہ دکھائے گئے ہیں]۔



چونکہ ا ج ا سطح تطہیل کے متوازی ہے
اس لیے $ا ع = ا ع$ اور $ع ا = ع ا$
نیز ب ج ب عمود وار ہے ا ج ا پر
دائرہ (ج) کے کسی نقطہ ن سے قطر ا ج ا پر عمود ن ع نکلا
اور فرض کرو کہ ن ع کا ظل ن ع ہے۔ تب ن ع عمود وار ہوگا
ا ا پر۔

چونکہ ن ع اور ب ج متوازی ہیں

$$\text{اس لیے } \frac{ن ع}{ا ع} = \frac{ب ج}{ب ج}$$

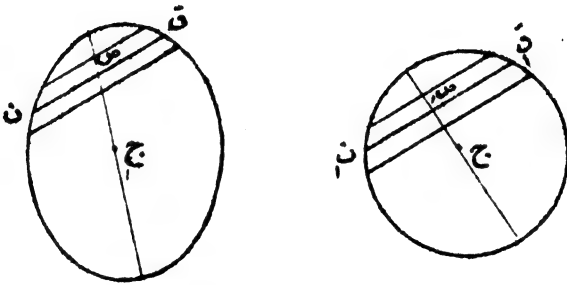
$$\text{یعنی } \frac{ن ع}{ا ع} = \frac{ب ج}{ب ج} = \frac{ب ج}{ا ج}$$

$$\text{نیز } ن ع = ا ع \times ا ج = ا ع \times ا ج$$

اس لیے $\frac{ن \times ج}{ج} = \frac{ب \times ج}{ج}$ جو ایک متقل مقدار ہے۔

پس دفعہ ۴ کی روش سے ن کا طریق ایک ناقص ہے جس کا محورِ اعظم $ا ا$ ہے اور جس کے نصف محورِ اعظم اور نصف محورِ اصغر ج ب اور ج ا ہیں۔
نوٹ - دائرہ کے ہر قطر کی تنصیف مرکز ج پر ہوتی ہے اس لیے
دائرہ کے ظل یعنی ناقص میں نقطہ ج کے ظل ج میں سے گزرنے والے ہر وتر کی تنصیف ج پر ہوتی ہے اس لحاظ سے نقطہ ج کو ناقص کا مرکز کہتے ہیں۔ یعنی
دائرہ کے مرکز کا ظل ناقص کا مرکز ہے۔

۵۳۔ مسئلہ۔ اگر ناقص کے متوازی وتروں کا ایک نظام ہو تو
ان وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک ایسا خط متقیم ہوگا جو ناقص کے
مرکز میں سے گزرتا ہے۔



فرض کرو کہ دائرہ (ج) کا ظل ایک ناقص ہے جس کا مرکز ج ہے۔
ناقص کے متوازی وتروں کا نظام دائرہ (ج) کے متوازی وتروں کے ایک
نظام کا ظل ہے اور ناقص کے ان وتروں کے وسطی نقاط دائرہ کے متناظر
وتروں کے وسطی نقطوں کے ظل ہیں۔ دائرہ کی صورت میں متوازی وتروں کے

وسطی نقطے ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جو دائرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور چونکہ خط مستقیم کا ظل خط مستقیم ہوتا ہے اس لیے ناقص کی صورت میں بھی متوازی وتروں کے وسطی نقطے ایک خط مستقیم پر واقع ہونگے جو ناقص کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔
تعریف - ناقص کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط مستقیم کو ناقص کا قطر کہتے ہیں کیونکہ یہ خط دائرہ کے کسی نہ کسی قطر کا ظل ہے۔

شرح - اگر ناقص کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والا قطر ناقص سے تقاطع، E پر ملے تو E اور E' پر کے ماسات ان وتروں کے متوازی ہونگے۔

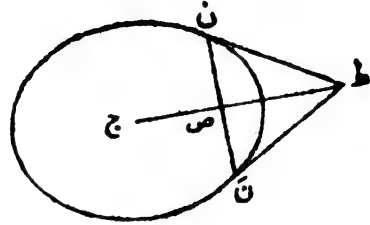
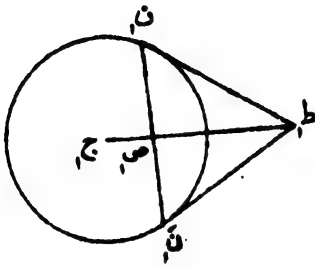
E میں سے ایک خط دیے ہوئے وتروں کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ خط ناقص سے کمر نقطہ H پر ملتا ہے چونکہ ناقص کا وتر EE' دیے ہوئے وتروں کے متوازی ہے اس لیے ضروری ہے کہ EH کا وسطی نقطہ قطر EE' پر واقع ہو اور یہ صرف اسی صورت میں درست ہو سکتا ہے جبکہ نقطہ H نقطہ E پر منطبق ہو۔ اس لیے وہ خط جو E میں سے گزرتا ہے اور دیے ہوئے نظام کے وتروں کے متوازی ہے نقطہ E پر ناقص کا ماس ہے۔ یعنی E پر ناقص کا ماس دیے ہوئے وتروں کے متوازی ہے۔
 اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ E' پر کا ماس بھی دیے ہوئے وتروں کے متوازی ہے۔

۵۴۔ مسئلہ - ناقص کے کسی وتر کے سروں پر کے ماسات

کا نقطہ تقاطع اس قطر پر واقع ہوتا ہے جو وتر مذکور کی تنصیف کرتا ہے۔
 دائرہ (ج) میں کسی وتر AN کے سروں پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع P ہے۔ اگر $ج$ ، $ا$ اور $ن$ کا نقطہ تقاطع $ص$ ہو تو $ن$ کا وسطی نقطہ $ص$ ہوگا۔

اب اس شکل کا قائم ظل لو۔ دائرہ کا ظل ایک ناقص ہوگا جس کا مرکز $ج$ دائرہ کے مرکز $ج$ کا ظل ہوگا۔ دائرہ کے وتر $ان$ کا ظل ناقص کا

دترن ن ہوگا اور ن اور ن پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع ط دائرہ کے



نقاط ن، ن پر تماسات کے نقطہ تقاطع ط کا ظل ہوگا اور ج ط کا ظل ج ط ہوگا۔

نیز ج ط اور ن ن کا نقطہ تقاطع ص نقطہ ص کا ظل ہوگا۔

چونکہ ایک خط مستقیم کے حصوں کی نسبت تطویل سے نہیں بدلتی اس لیے

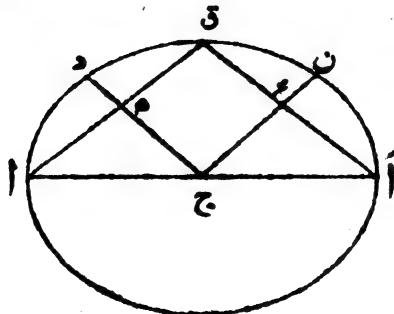
ن، ن کے وسطی نقطہ ص کا ظل یعنی نقطہ ص ناقص کے دترن ن کا وسطی نقطہ ہوگا۔

پس ثابت ہوا کہ ناقص کے دترن ن کے سروں پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع

ط ناقص کے اس قطر پر ہے جو دترن ن کی تنصیف کرتا ہے۔

۵۵۔ مسئلہ۔ اگر ناقص کا ایک قطر دوسرے قطر کے متوازی دتروں

کی تنصیف کرے تو دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی دتروں کی تنصیف کرے گا۔



فرض کرو کہ ناقص کا ایک قطر ج ن دوسرے قطر ج د کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے۔

ناقص کے محور اعظم AA کے سرے A میں سے ج د کے متوازی ایک وتر AC کھینچو۔ AC کو ملاؤ۔

فرض کرو کہ AC اور ج ن کا نقطہ تقاطع E ہے اور AC اور ج د کا نقطہ تقاطع H ہے۔

حسب مفروض AC کا وسطی نقطہ E ہوگا۔

مثلاً AC میں A میں AC کا وسطی نقطہ E ہے اور AA کا وسطی نقطہ ج ہے۔ اس لیے AC ج E کے متوازی ہے۔ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ وتر AC کا وسطی نقطہ H ہے۔

چونکہ ج H مثلاً AC کے ضلع AA کے وسطی نقطہ ج میں سے گزرتا ہے اور ضلع AC کے متوازی ہے اس لیے AC کا وسطی نقطہ H ہے اس لیے AC کے متوازی وتروں کی تنصیف ج د کرتا ہے یعنی قطر ج ن کے متوازی وتروں کی تنصیف قطر ج د کرتا ہے۔

تعریف۔ اگر ناقص کے دو قطر ایسے ہوں کہ ایک قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف دوسرا قطر کرے (اور لازماً دوسرے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف پہلا قطر کرے) تو ان قطروں کو **ہنر دو ج قطر** کہتے ہیں۔

نوٹ :- ناقص کا محور اعظم اور محور اصغر مزدوج قطروں کی خاص صورت ہے۔

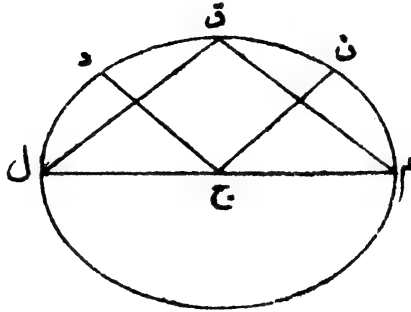
۵۶۔ **تعریف**۔ اگر ناقص کے کسی قطر ج ن کے سروں

ن، ن کو ناقص کے کسی نقطہ ق سے ملایا جائے تو وتر ن ق اور ن ق تکمیلی وتر کہلاتے ہیں۔

مسئلہ۔ ناقص کے تکمیلی وتروں کے متوازی قطر مزدوج قطر ہوتے ہیں۔ ناقص کے کسی نقطہ ق کو کسی قطر ل ج م کے سروں سے

ملاؤ۔ تب ق ل، ق م تکمیلی وتر ہونگے۔

مرکز ج میں سے ج ن، ج د بالترتیب ل ق، م ق کے متوازی کھینچو۔



ہمیں ثابت کرنا ہے کہ ج ن، ج د ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔ چونکہ مثلث ق ل م کے ضلع ل م کے وسطی نقطہ ج میں سے ج ن، ل ق کے متوازی کھینچا گیا ہے اس لیے ج ن، ق م کی تنصیف کرتا ہے۔ اس لیے ج ن اُن سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو ق م کے متوازی ہیں۔ یعنی قطر ج ن اُن سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو قطر ج د کے متوازی ہیں۔

اس لیے قطر ج د اُن سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو قطر ج ن کے متوازی ہیں۔ پس ثابت ہوا کہ ج ن، ج د مزدوج قطر ہیں۔

مشکل ۱۹

(۱) ثابت کرو کہ سطح تطلیل کے مناسب انتخاب سے ناقص کی تطلیل دائرہ میں کی جاسکتی ہے۔
اشارہ: سطح تطلیل ناقص کے محور اصغر کے متوازی ہے اور

ناقص کی سطح کے ساتھ زاویہ 'جم' $\frac{ج ب}{ج ا}$ بنتا ہے۔

(۲) اگر ناقص کے ایک وتر n کے سروں پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع p ہو اور p میں سے گزرنے والا قطر ناقص سے e غر پر اور وتر n سے v پر ملے تو ثابت کرو کہ e و v کی موسیقی تقسیم v اور p پر ہوتی ہے اور اس کی مدد سے ثابت کرو کہ v ج $v \times$ ج $p =$ ج e (۳) اگر p کے سوال میں p میں کوئی اور خط کھینچا جائے جو ناقص سے q پر ملے اور وتر n سے m پر ملے تو ثابت کرو کہ q کی موسیقی تقسیم m اور p پر ہوتی ہے۔

(۴) اگر دائرہ کی سطح اور سطح تغلیل کا درمیانی زاویہ p ہو تو تغلیل سے جو ناقص حاصل ہوتا ہے اس کا خروج مرکز معلوم کرو۔

(۵) ناقص کی سطح میں ایک نقطہ p ہے اور p میں سے گزرنے والا کوئی خط ناقص سے n اور n پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ n اور n پر کے ماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

(۶) ثابت کرو کہ ناقص کے دو متوازی مماسات کے نقاط تماس کو ملانے والا خط ناقص کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔

(۷) ناقص کے متوازی وتروں کا وہ نظام کھینچو جن کے وسطی نقطے ایک دیے ہوئے قطر پر واقع ہوں۔

(۸) ناقص کے کسی نقطہ n پر کا مماس رأس p کے مماس سے q پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج q اور n باہم متوازی ہیں۔

(۹) اگر ناقص کے دو ماسوں کے وتر p کے متوازی کوئی خط کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ اس خط کے وہ حصے جو مماسات اور ناقص کے درمیان منقطع ہوتے ہیں مساوی ہیں۔

(۱۰) ثابت کرو کہ مزدوج قطروں میں سے ایک قطر کے کسی سرے پر کا مماس دوسرے قطر کے متوازی ہے۔

(۱۱) ایک متوازی الاضلاع کے چاروں ضلعے ایک دیے ہوئے ناقص کو مس کرتے ہیں ثابت کرو کہ اس متوازی الاضلاع کے وتر ناقص کے

مزاج قطرہ میں۔

(۱۲) ثابت کرو کہ ناقص کے محورِ اعظم اور محورِ اصغر کے سروں پر کے
ماسوں سے بننے والے مستطیل کے وتر ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ
ان قطروں کے طول مساوی ہیں۔

(نوٹ - ان مزدوج قطروں کو مساوی مزدوج قطر کہتے ہیں) -
(۱۳) ثابت کرو کہ دائرہ کے دو علی التوالم قطروں کے غل اس ناقص کے مزدوج قطر ہیں جو دائرہ کی تنظیم سے حاصل ہوتا ہے۔

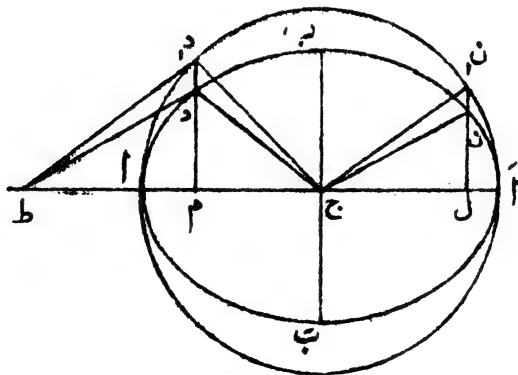
(۱۴) جن، ج ناقص کے دو مروج نیم قطہ ہیں۔ نہایت کروک
مثلت جن کا رقبہ مستقل ہے۔

(۱۵) ن ج ن اور د ج ذ ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔ ثابت کرو کہ ن ن د د
پر کے ماسوں سے جو متوازی الاضلاع بنتا ہے اُس کا رقبہ مستقل ہے۔

(۱۶) جین، جاد ناقص کے نیم مروج قطر ہیں۔ ن سے

ج د پر نمودن ف نکالا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ج د × ن ف = ج ا × ج ب

(۱۶) ج ن، ج و ناقص کے مزدوج نیم قطر ہیں۔ امدادی دائرہ پر



ن اور د کے متناظر نقطے ن اور د ہیں۔ ثابت کرو کہ زاویہ ن ج د قائم ہے۔

اشارہ۔ معلوم ہے کہ د اور د پر کے مماسات کا نقطہ تقاطع ط محور اعظم محدودہ پر واقع ہے۔ نیز د پر کا مماس دط متوازی ہے ج ن کے۔ اس لیے مثلثات

$$\text{ط م د اور ج ل ن متشابہ ہیں۔ اس لیے } \frac{\text{ط م}}{\text{ج ل}} = \frac{\text{د م}}{\text{ل ن}} = \frac{\text{د م}}{\text{ل ن}}$$

اس لیے مثلثات ط م د اور ج ل ن متشابہ ہیں یعنی دط متوازی ہے ج کے یعنی ن ج د قائمہ ہے۔

(۱۸) سوال بالا کی شکل میں ثابت کرو کہ ج ن + ج د = ج ا + ج ب
فرض کرو کہ زاویہ ل ج ن = ط

$$\text{تب ج ل} = \text{ج ن، جم ط} = \text{ج ا جم ط}$$

$$\text{ل ن} = \frac{\text{ج ب}}{\text{ج ا}} \times \text{ل ن} = \frac{\text{ج ب}}{\text{ج ا}} \times \text{ج ن، جب ط} = \text{ج ب جب ط}$$

اسی طرح ج م = ج ا جب ط اور م د = ج ب جم ط

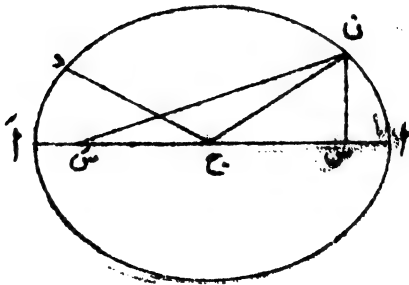
$$\text{اس لیے ج ن} + \text{ج د} = (\text{ج ل} + \text{ل ن}) + (\text{ج م} + \text{م د})$$

$$= \text{ج ا جم ط} + \text{ج ب ا جب ط} + \text{ج ا جب ط} + \text{ج ب ا جم ط}$$

$$= \text{ج ا} + \text{ج ب}$$

(۱۹) ن ج ن د ناقص کے مزدوج نیم قطر ہیں ثابت کرو کہ ن س × س ن س

$$= \text{ج د}$$



اشارہ - سن + سن = ۱۲

اس لیے سن + سن + سن = ۱۲

لیکن سن + سن = ۱۲ ج + ۲ ج = ۱۲

۱۲ ج + ۲ ج - ۲ ج =

اس لیے سن + سن = ۱۲ ج - ۲ ج = ۱۰ ج

اس لیے سن + سن = ۱۰ ج

ج + ج = ۱۰ ج

ج = ۵

امثلہ ۲

(ناقص پر متفرق مثالیں)

(۱) ناقص کے مرکز کو مرکز مان کر دائرہ کھینچا گیا ہے جو ناقص کو چار نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ متبادل نقطوں کو ملانے والے خطوط مرکز میں سے گزرتے ہیں اور محور کے ساتھ مخالف سمتوں میں مساوی زاویے بناتے ہیں۔

(۲) کاغذ پر ایک ناقص کھینچا ہوا ہے اس کے ضروری اجزاء معلوم کرو۔

[اشارہ - کوئی دو متوازی وتر کھینچو۔ ان کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والا خط قطر ہوگا جس کا وسطی نقطہ مرکز ہوگا۔ اب ایک ہم مرکز دائرہ کھینچ کر

سوال (۱) کی مدد سے محور معلوم کرو۔ اب دیگر اجزاء باسانی معلوم ہو سکتے ہیں]

(۳) اگر ناقص کے دو وتر ایک دوسرے کی تفسیف کریں تو ثابت کرو کہ

نقطہ تقاطع ناقص کا مرکز ہوگا۔

(۴) ناقص کے کسی نقطہ پر کا ماس ایک قطر کے سروں پر کے ماسات

سے لا اور حا پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج لا ج حا ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔

(۵) امدادی دائرہ کی مدد سے ایک دیے ہوئے بیرونی نقطہ سے

ناقص کے ماس کھینچو۔

(۶) ج ن' ج د ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔ ن پر کا عماد محور اعظم سے

گ پر اور ج د سے ف پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ $ن گ \times ن ف = ج ب^2$

[اشارہ - فرض کرو کہ ن کا سین ن ع ممدودہ ج د سے ہر پر ملتا ہے۔

نیز فرض کرو کہ ن سے محور اصغر پر عمود ن ع ہے اور ن پر کا ماس محور اصغر ممدودہ سے ت پر ملتا ہے۔ چونکہ گ' ف' ہ' ع' مشترک المحيط ہیں اس لیے

$ن گ \times ن ف = ن ع \times ن ہ = ج ع \times ج ت = ج ب^2$] سے

(۷) ج ن' ج د ناقص کے مزدوج قطر ہیں، ن پر کا عماد محور اصغر

گ پر اور ج د سے ف پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ $ن گ \times ن ف = ج ب^2$

(۸) اگر ناقص کے ایک ماسکی وتر کے سروں میں سے گزرنے والے قطر

مزدوج قطر ہوں تو ثابت کرو کہ ماسکی وتر کا طول نیم محور اعظم کے مساوی ہوگا۔

[اشارہ - فرض کرو کہ ماسکی وتر ن س د ہے حسب مفروض ج ن' ج د

مزدوج قطر ہیں، ج میں سے دن کے متوازی ایک خط کھینچو جو ن پر کے ماس

ک پر ملے۔ تب $ن د = ج ک = ج ا$]

(۹) دو ناقصوں کا امدادی دائرہ ایک ہی ہے۔ اگر ان میں ایک ناقص

دوسرے کے ماسکوں میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ دوسرا ناقص پہلے کے ماسکوں

میں سے گزریگا۔

(۱۰) ناقص کے مرکز ج سے نقطہ ن پر کے ماس پر عمود ن ما

نکالا گیا ہے اور ما سے ناقص کا دوسرا ماس حاق ہے۔ ثابت کرو کہ

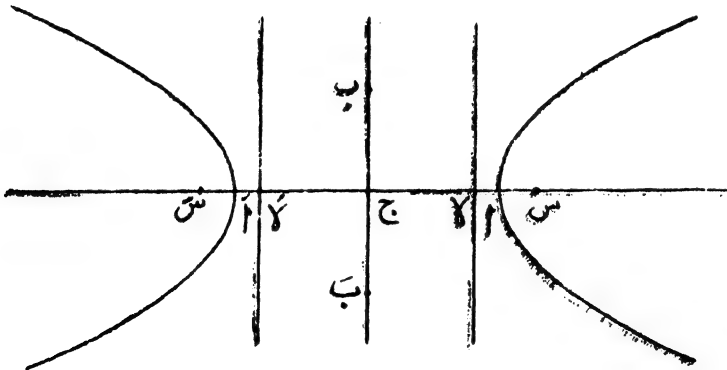
ن پر کا عماد حاق میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے میں سے

گزرتا ہے۔

چوتھا باب

زائد

۵۷ - دفعہ (۱۱) کی تعریف کے بموجب زائد ایک مخروطی ہے جس کا خروج المرکز ز بڑا ہے اسے پہلے باب (دفعات ۵ تا ۱۰) میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ زائد ایک منحنی ہے جس کی دو علیحدہ علیحدہ شاخیں ہیں اور جس کے دو تشاکل کے محور ہیں جو ایک دوسرے کو مرکز ج پر عمود وار قطع کرتے ہیں اور جن میں سے



ایک محور ۲۲ مرتب پر عمود وار ہے اور دوسرا محور ب مرتب کے متوازی ہے۔

نیز محور ۱ پر دو اسکے س اور س واقع ہیں اور ان ماسکوں کے جواب کے دو مرتب ہیں جو ۱ پر عمود وار ہیں اور ۱ کو مرکز ج سے مساوی فاصلوں پر بالترتیب نقاط ۱ اور ۱ پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ ج : س = ۱ : ج = ۱ : ج = ۱ : ج = ۱ : ج ماسکوں میں سے گزرنے والا محور زائد سے دو حقیقی نقطوں ۱، ۱ پر ملتا ہے جو زائد کے رأس کہلاتے ہیں۔ اس محور کو زائد کا قاطع محور کہتے ہیں۔ اور دوسرے محور تشاکل ب ب کو جو زائد کو حقیقی نقطوں پر قطع نہیں کرتا مزدوج محور کہتے ہیں۔

۵۸۔ اگر مزدوج محور ج ب پر نقاط ب، ب اس طرح لیے جائیں کہ ب : ج = ج : ب اور ج : ب = ج : ب۔ ج س تو نقاط ب اور ب مزدوج محور کے سرے کہلاتے ہیں۔

مسئلہ۔ ج ب = ا س = ا س = ج س × ۱ س

کیونکہ ج ب = ج س - ج ا = (ج س + ج ا) (ج س - ج ا)

$$= ا س \times ا س$$

نیز ج ب = ج س - ج ا = ج س - ج س × ج ا

$$= ج س [ج س - ج ا] = ج س \times ۱ س$$

ترقیہ۔ نیم قاطع محور ج ا کے طول کو بالعموم ۱ سے اور نیم مزدوج محور ج ب کے طول کو بالعموم ب سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

نوٹ۔ (۱) چونکہ ج س = ز × ج ا

اس لیے رشتہ ج ب = ج س - ج ا ہو جاتا ہے

$$ج ب = ج س - ج ا = (ز - ۱) ج ا$$

یعنی اوپر کی ترقیہ کے مطابق ب = ز (ز - ۱)

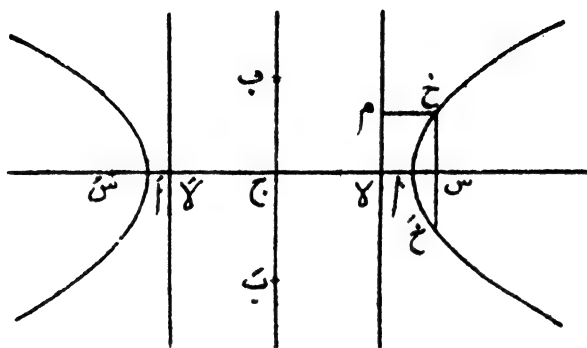
اس رشتہ کی مدد سے اگر مفادیر ۱ ب اور ز میں سے کوئی دو معلوم ہوں

تو تیسری مقدار معلوم ہو سکتی ہے۔

نوٹ:- (۱۲) اس دفعہ کا مقابلہ ناقص کے مائل خواص مندرجہ دفعہ ۴۲ کے ساتھ کرو۔

+ ۵۹ - مسئلہ - زائد کا نیم وترِ خاص، نیم قاطع محور اور نیم فردوج محور کا

$$\frac{\text{ج ب}}{\text{س خ}} = \frac{\text{ج ۱}}{\text{ج ب}} \text{ یعنی}$$



وترِ خاص کے ایک سرے خ سے مرتب پر عمود خ م نکالو۔

$$\frac{\text{ج م}}{\text{ج ۱}} = \frac{\text{س خ}}{\text{خ م}} = \text{ز}$$

$$\text{یعنی س خ} \times \text{ج ۱} = \text{ج م} \times \text{خ م}$$

$$\text{ج م} \times \text{س} = \text{ج ۱} \times \text{خ م}$$

$$\text{ج ب}^2 = (\text{ب موجب دفعہ ۵۸})$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ج ۱}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{ج ب}}{\text{س خ}}$$

نوٹ - مسئلہ بالا میں ضمنًا حاصل ہوا کہ نیم وترِ خاص س خ = $\frac{\text{ج ب}^2}{\text{ج ۱}}$

اگر حسب معمول نیم وترِ خاص کے طول کو ل سے تعبیر کیا جائے تو اس نتیجہ کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$ل = \frac{\text{ب}^2}{\text{ج ۱}}$$

امثلہ ۲۱

(۱) زائد کے کسی محور پر کے کسی نقطہ سے محور کی مخالف جانب میں دو خط کھینچے گئے ہیں جو زائد سے ملتے ہیں اور محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان خطوط کے طول مساوی ہیں۔ نیز اس مسئلہ کا عکس بیان کرو اور اسے بھی ثابت کرو۔

(۲) دفعات ۸، ۷ کے نتائج کو استعمال کرنے کے بغیر ثابت کرو کہ زائد کلیتہً اُن خطوط کے باہر واقع ہے جو قاطع محور کے سر میں 'ا' میں سے گزرتے ہیں اور 'ا' پر عمود وار ہیں اور اس نتیجہ کی مدد سے ثابت کرو کہ زائد دو لائنیں ہی شاخوں پر مشتمل ہے۔

(۳) اگر ایک ناقص، ایک مکافی اور ایک زائد میں ایک ماسکہ اور مرتب مشترک ہوں تو ثابت کرو کہ مکافی کلیتہً ناقص کے باہر واقع ہوگا اور زائد کی ایک شاخ کے اندر واقع ہوگا۔

(۴) دو ثابت نقطوں 'ا' اور 'ب' میں سے متعدد دائرے کھینچے گئے ہیں اور ان دائروں میں سے کسی ایک کی قوس پر نقطہ 'ن' ایسا ہے کہ قوس 'ان' قوس 'ن' ب کی نصف ہے۔ ثابت کرو کہ 'ن' کا طریق اس قطع زائد کی ایک شاخ ہے جس کا ماسکہ 'ا' ہے اور مرتب 'ب' کا عمودی منصف ہے اور خروج المرکز ۲ ہے۔

(۵) اگر ایک دائرہ قاطع محور کو ایک ماسکہ پر مس کرے اور مزدوج محور کے ایک سرے میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ دائرہ کے اندر مزدوج محور کا جو طول منقطع ہوتا ہے وہ $\frac{ج ا}{ج ب}$ کے مساوی ہے۔

(۶) مثلث 'ا' ب ج کا ایک رأس 'ا' ثابت ہے اور دوسرے دو رأس 'ب' اور 'ج' ایک ثابت خط مستقیم پر حرکت کرتے ہیں۔ اگر زاویہ 'ا' ہمیشہ ایک مستقل زاویہ 'ع' کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ مثلث 'ا' ب ج کے

$$\frac{\text{ج ب}^1}{\text{ج}^1} = \frac{\text{ن ع}^1}{\text{ع}^1 \times \text{ا}^1}$$

$$\text{نوٹ (۱)۔ چونکہ } \text{ع}^1 \times \text{ا}^1 = (\text{ج ع} - \text{ج ا}) = (\text{ج ع} + \text{ج ا})$$

$$\text{ج ع}^1 - \text{ج ا}^1 =$$

اس لیے مسئلہ بالا ہو جاتا ہے۔

$$\frac{\text{ج ب}^1}{\text{ج}^1} = \frac{\text{ن ع}^1}{\text{ج ع}^1 - \text{ج ا}^1}$$

$$\text{یعنی } \frac{\text{ن ع}^1}{\text{ج ب}^1} = \frac{\text{ج ع}^1 - \text{ج ا}^1}{\text{ج ا}^1} = \frac{\text{ج ع}^1}{\text{ج ا}^1} - 1$$

$$\text{یعنی } \frac{\text{ج ع}^1}{\text{ج ا}^1} - \frac{\text{ن ع}^1}{\text{ج ب}^1} = 1$$

اب اگر $\text{ا}^1 \text{ ج}^1$ اور $\text{ب}^1 \text{ ج}^1$ کو حوالہ کے محور مانا جائے اور نقطہ ن کے محد (لا، ما) ہوں تو $\text{ج ع} = \text{لا (فضل) اور ع ن} = \text{ما (معین)}$

$$\text{اور نتیجہ بالا ہو جاتا ہے } 1 = \frac{\text{لا}^1}{\text{ا}^1} - \frac{\text{ما}^1}{\text{ب}^1}$$

چونکہ زائد پر کے کسی نقطہ ن کے محد (لا، ما) اس رشتہ کو پورا کرتے

ہیں اس لیے یہ رشتہ یعنی $1 = \frac{\text{لا}^1}{\text{ا}^1} - \frac{\text{ما}^1}{\text{ب}^1}$ زائد کی مساوات ہے۔

$$\text{نوٹ (۲)۔ اگر (لا، ما) زائد } \frac{\text{لا}^1}{\text{ا}^1} - \frac{\text{ما}^1}{\text{ب}^1} = 1 \text{ پر کا ایک نقطہ}$$

ہو تو نقاط (لا، ما) اور (لا، ما) بھی زائد کی مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ اس لیے یہ نقطے بھی زائد پر ہیں۔ اس سے ظاہر ہے کہ زائد حوالہ کے دونوں محوروں $\text{ا}^1 \text{ ج}^1$ اور $\text{ب}^1 \text{ ج}^1$ کے لحاظ سے متشکل ہے۔ اس طریقہ سے اس امر کا متبادل ثبوت حاصل ہوتا ہے کہ ”زائد بلحاظ دو عملی القوائم محوروں کے متشکل ہے۔“

اس سے ظاہر ہے کہ مرکز ج میں سے گزرنے والے ہر وتر کی تنصیف ج پر ہوتی ہے۔ اس لیے مرکز ج میں سے گزرنے والے ہر وتر کو زائد کا قطر کہتے ہیں۔

نوٹ (۳) زائد کی مساوات $\frac{لا}{ا} = \frac{ب}{ب} = ۱$ سے ظاہر ہے کہ

لا کی عددی قیمت ۱ سے چھوٹی نہیں ہو سکتی یعنی زائد کلیتہً اُن خطوط کے باہر واقع ہے جو قاطع محور کے سروں ۱، ۲ میں سے گزرتے ہیں اور قاطع محور پر عمود وار ہیں۔

نیز ظاہر حقیقی قیمت اختیار کر سکتا ہے یعنی قاطع محور کے متوازی ہر خط زائد کو دو حقیقی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

مثلاً ۲۲

(۱) ۱۱ ایک محدود خط مستقیم ہے۔ ۱۲ محدودہ پر کے کسی نقطہ ع پر عمود ع ن ہے۔ اگر $\frac{ع ن}{ع ۲} = \frac{ع ۱}{ع ۲}$ متقل رہے تو ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک زائد ہے جس کا قاطع محور ۱۲ ہے۔

(۲) ایک دائرہ کے ایک ثابت قطر ۱۲ محدودہ پر کے کسی نقطہ ع میں سے ۱۱ پر عمود ع ن کھینچا گیا ہے اور اس عمود کا طول دائرہ کے اُس مماس کے طول کے مساوی ہے جو ع میں سے کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک زائد ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اس قطع زائد کا خروج المرکز ۲۱ ہے۔

(۳) ایک دائرہ کے ایک ثابت قطر ۱۲ محدودہ پر کے کسی نقطہ ع میں سے ۱۱ پر عمود ع ن کھینچا گیا ہے اور اس عمود کا طول اس مماس کے طول کے ساتھ جو ع میں دائرہ تک کھینچا گیا ہے ایک متقل نسبت رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک زائد ہے۔

(۴) ن ن دائرہ کا کوئی وتر ہے جو ایک ثابت قطر ۱۲ پر عمود وار ہے ثابت کرو کہ ان اور ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک زائد ہے۔

(۵) ن ع ن ناقص کا ایک دوہرا متعین ہے۔ ثابت کرو کہ

۱۱ اور ۱۲ کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک زائد ہے۔

(۶) زائد پر کے کسی نقطہ ۱۱ سے قاطع محور مدودہ پر عمود ۱۲ ع

نکالا گیا ہے اور ع سے ۱۱ قطر والے دائرہ کا ایک ماس ع ت کھینچا گیا ہے اگر زاویہ ع ج ت = ط تو ثابت کرو کہ نقطہ ۱۱ کے عمود (۱۱ ق ط، ب مس ط) ہیں۔

(۷) دفعہ ۶ کے مسئلہ کی مدد سے ثابت کرو کہ زائد متشکل ہے

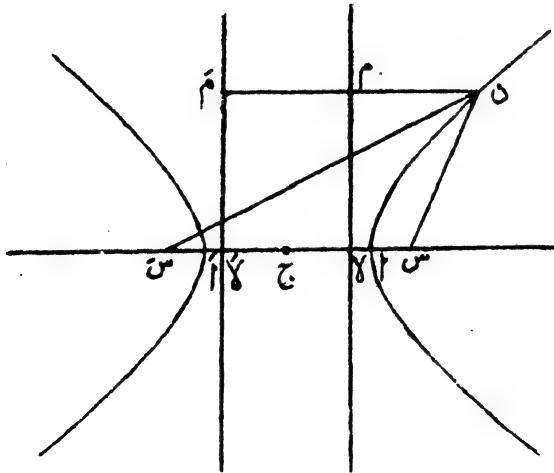
بمطابق خط ب ج ب ج میں سے گزرتا ہے اور ۱۱ پر عمود وار ہے۔

نیز ثابت کرو کہ زائد کا ایک آور ماسک اور اس کے جواب کا ایک اور مرتب ہے۔

(۸) ناقص پر کا کوئی نقطہ ۱۱ ہے۔ اگر معین ع ۱۱ نقاط ۱۲، ۱۳

میں سے گزرنے والے دائرہ سے مکرر نقطہ ک بدلے تو ثابت کرو کہ ک کا طریق ایک زائد ہے۔

۶۱۔ مسئلہ۔ زائد پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کا فرق مستقل رہتا ہے اور قاطع محور کے مساوی ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ زائد پر کا کوئی نقطہ ۱۱ ہے۔ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ ۱۱ ن ۱۲ = ۱۳

ن میں سے س کے جواب کے مرتب پر ن م اور س کے جواب کے مرتب پر عمود ن م نکالو۔ تب ن م خط مستقیم ہوگا۔

زائد کی تعریف کے بموجب $س ن = ز \times ن م$

اور $س ن = ز \times ن م$

اس لیے $س ن - س ن = ز (ن م - ن م)$

$$آ آ = ز \times لا لا = آ آ$$

نوٹ (۱) اگر نقطہ ن زائد کی اس شاخ پر ہو جس کے اندر ماسکہ س

واقع ہے تو س ن - س ن = آ آ اور اگر نقطہ ن زائد کی اس شاخ پر ہو

جس کے اندر ماسکہ س واقع ہے تو س ن - س ن = آ آ

نوٹ (۲) اس مسئلہ کی مدد سے ایک نقطہ کی مسلسل حرکت سے

زائد مرتسم کرنے کا مندرجہ ذیل جینی طریقہ (Mechanical method) حاصل ہوتا ہے۔

ایک بے پچاک رستی کے ایک سرے کو ایک ثابت نقطہ ب پر اور دوسرے

سرے کو ایک سلاخ کے سرے ل پر باندھو۔ اب سلاخ کے دوسرے سرے کو

ایک ثابت نقطہ آ کے گرد پھراؤ اور رستی کو پنسل کی ایک نوک کے ذریعہ



اس طرح تناکر رکھو کہ پنسل ہمیشہ سلاخ ل پر حرکت کرے۔ تب پنسل کی نوک سے

ایک قطع زائد مرسم ہوگا جس کے ماسکے نقاط ۲ اور ب پر ہونگے۔ کیونکہ پنسل کی زک کے کسی مقام ن کے لیے

۱ ن + ۱ ل = سلاخ کا طول اور ب ن + ۱ ل = رسی کا طول
اس لیے ۱ ن سہ ب ن = سلاخ اور رسی کے طولوں کا فرق جو مستقل ہے۔
اوپر کے جیلی غل سے زائد کی صرف ایک شاخ مرسم ہوتی ہے۔
دوسری شاخ حاصل کی جاسکتی ہے اگر سلاخ کے ثابت سرے کو نقطہ ب کے گرد گھمایا جائے اور رسی کے سرے کو ثابت نقطہ ۱ پر باندھ دیا جائے۔

مثلاً ۲۳

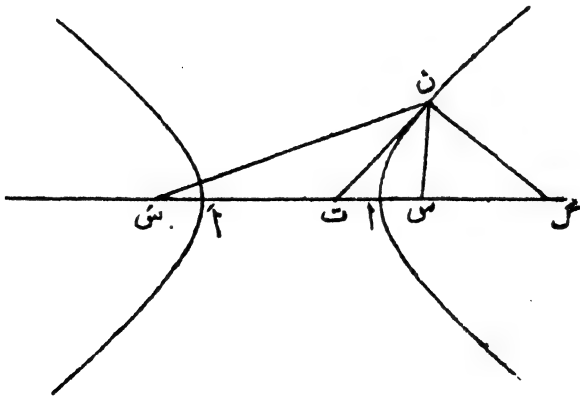
- (۱) زائد کے قاطع محور کے سروں اور ایک ماسکے س کے مقام معلوم ہیں۔ زائد کو مرسم کرو۔
- (۲) اُس دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو جو ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے دائرہ کو مس کرے۔
- (۳) اُس دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو جو دو دیے ہوئے دائروں کو مس کرے۔ مختلف صورتوں میں امتیاز کرو۔
- (۴) زائد کا مرکز 'قاطع محور کا طول اور منحنی پر کا ایک نقطہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ ماسکوں کا طریق ایک اور زائد ہے۔
- (۵) قطع ناقص کا ایک ماسکے اور اُس پر کے دو نقطے دیے ہوئے ہیں۔ ثابت کرو کہ دوسرے ماسکے کا طریق ایک قطع زائد ہے۔
- (۶) اگر دو زائدوں کے ماسکے مشترک ہوں تو ثابت کرو کہ یہ منحنیات ایک دوسرے کو قطع نہیں کر سکتے۔
- (۷) مکانی پر کے دو نقطے اور مکانی کے محور کی سمت معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مکانی کے ماسکے کا طریق ایک زائد ہے۔
- (۸) ایک مثلث کا قاعدہ اور نیز اندرونی دائرہ اور قاعدہ کا نقطہ تماس معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کے رأس کا طریق ایک زائد ہے۔

(۹) ایک محدود خط AB پر ایک ثابت نقطہ C ہے۔ کوئی دائرہ خط AB کو نقطہ C پر مس کرتا ہے۔ A اور B سے اس دائرہ کے مماسات کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرو۔
(۱۰) زائد کے ماسکے S اور S' معلوم ہیں، نیز قاطع محور کا طول معلوم ہے۔ زائد پر کے متعدد نقطے معلوم کرو۔

(۱۱) اگر زائد کی سطح میں کوئی نقطہ Q ہو تو ثابت کرو کہ Q سے S قاطع محور سے بڑا ہوگا، مساوی ہوگا، چھوٹا ہوگا بہ موجب اس کے کہ نقطہ Q زائد کے اندر زائد کے اوپر یا زائد کے باہر ہو۔

(۱۲) ناقص کا ایک ماسکے S ، ایک مماس اور ناقص پر کا ایک نقطہ معلوم ہیں۔ ناقص کے دوسرے ماسکے S' کا طریق معلوم کرو۔

[اشارہ - مطلوبہ طریق ایک زائد ہے جس کا ایک ماسکے Q پر ہے اور دوسرا ماسکے S کے خیال پر ہے جو دیے ہوئے مماس میں لیا جائے]۔
۶۲۔ مسئلہ۔ زائد پر کے کسی نقطہ N پر کے مماس اور عماد زاویہ SNS' کے بالترتیب خارجی اور داخلی منصف ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ زائد کے کسی نقطہ N پر کا عماد، S سے گزرتا ہے

دفعہ ۱۹ کی رو سے

$$\text{س گ} = \text{ز} \times \text{س ن}$$

$$\text{اور س گ} = \text{ز} \times \text{س ن}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{س گ}}{\text{س ن}} = \frac{\text{س ن}}{\text{س ن}}$$

اس لیے ن گ زاویہ س ن س کا ایک منصف ہے۔

اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ ن گ زاویہ س ن س کا خارجی منصف ہے،

چونکہ س گ = ز × س ن، اس لیے س گ کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت ز × س ن ہے۔

$$\text{یعنی س گ} < \text{ز} \times \text{س ن} = \text{س س}$$

اس لیے نقطہ گ، س س ممدودہ پر واقع ہے۔

اس لیے ن گ زاویہ س ن س کا خارجی منصف ہے

چونکہ ن پر کا ماس، ن پر کے عماد پر علی القوائم ہے

اس لیے ن پر کا ماس ن ت زاویہ س ن س کا داخلی منصف ہے۔

امشله ۲۴

(۱) زائد کے کسی نقطہ ن پر کا ماس ماسوں س، س کے جواب

کے مرتبوں سے بالترتیب مے، مے پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلثات ن س مے

اور ن س مے متشابه ہیں۔ اور اس کی مدد سے ثابت کرو کہ ن پر کا ماس

زاویہ س ن س کا اندرونی منصف ہے۔

[اشارہ - ن میں سے محور کے متوازی ایک خط کھینچو جو مرتبوں سے

$$\text{م اور م پر ملے۔ تب } \frac{\text{س ن}}{\text{س ن}} = \frac{\text{م ن}}{\text{ن م}} = \frac{\text{ن م}}{\text{ن م}}$$

نیز زاویہ ن س مے = زاویہ ن س مے کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے۔

اس لیے مثلثات ن س مے اور ن س مے متشابه ہیں۔

اس لیے \angle م س ن \angle = \angle م س ن ہے
یعنی ن پر کا ماس زاویہ م س ن کا اندرونی منصف ہے۔
(۲) ثابت کرو کہ قاطع محور کے کسی سرے پر کا ماس قاطع محور پر عمود وار ہے۔

(۳) زائد کا ایک ماسک اور ایک دیے ہوئے نقطہ پر کا ماس معلوم ہیں۔
دوسرے ماسک کا طریق معلوم کرو۔

(۴) زائد کا کوئی قطر ن ج ن ہے۔ ن پر کا ماس م س ن سے
نقطہ ت پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ م س ن = م س ت
(۵) اگر ایک ناقص اور ایک زائد کے دونوں ماسک مشترک ہوں تو
ثابت کرو کہ ان کے کسی نقطہ تقاطع پر کے ماسات ایک دوسرے پر عمود وار
ہوتے ہیں۔

نوٹ۔ اگر دو منحنیوں کے نقطہ تقاطع پر کے ماس ایک دوسرے پر
عمود وار ہوں تو کہا جاتا ہے کہ منحنی اس نقطہ پر ایک دوسرے کو علی القوائم
قطع کرتے ہیں۔

اگر دو مرکز دار مخروطیوں کے دونوں ماسک مشترک ہوں تو یہ مخروطی
ہم ماسک مخروطی کہلاتے ہیں۔

ان تعریفات کی بناء پر اس سوال کے نتیجہ کو اس طرح بھی بیان کیا جاسکتا ہے
”اگر ایک ناقص اور زائد ہم ماسک ہوں تو وہ ایک دوسرے کو علی القوائم
قطع کرتے ہیں۔“

(۶) زائد پر کا کوئی نقطہ ن ہے۔ اگر مثلث م س ن کا حاطہ دائرہ
مزدوج محور سے نقاط ہ اور ع پر ملے تو ثابت کرو کہ ن ہ اور ن ع نقطہ ن پر کے
ماس اور عماد ہیں۔

[اشارہ۔ چونکہ قوس م س ع = قوس م س ع اس لیے ن ع
زاویہ م س ن کا ناصف ہے۔]

(۷) زائد کے نقطہ ن پر کا ماس مزدوج محور سے ع پر ملتا ہے۔

تب مثلثات ن ماس اور ن ماق میں

زاویہ سن سن ما = زاویہ قن ما

(کیونکہ ن پر کا ماس زاویہ سن سن مں کا داخلی نصف ہے)

نیز زاویہ ن ماس = زاویہ ن ماق (کیونکہ ہر ایک قائمہ ہے)

اور ن ما دونوں مثلثات میں مشترک ہے -

اس لیے مثلثات ن ماس اور ن ماق آپس میں ہر طرح سے مساوی ہیں

اس لیے سن ما = قن ما اور سن ن = قن

پس سن ق = سن ن - قن = سن ن - سن ن

= ۱۱ = ۱۲ ج

چونکہ مثلث سن سن ق میں سن سن کا وسطی نقطہ ج ہے

اور سن ق کا وسطی نقطہ ما ہے

اس لیے ج ما = $\frac{1}{2}$ سن ق = ج ۱

اس لیے ما اُس دائرہ پر واقع ہے جس کا مرکز ج ہے

اور نصف قطر ج ۱ ہے یعنی ما امدادی دائرہ پر واقع ہے۔

اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ما بھی امدادی دائرہ پر واقع ہے

اب اگر ما ج امدادی دائرہ سے گزرے گا پر ملے تو زاویہ ما مادا

قائمہ ہوگا کیونکہ ما ما امدادی دائرہ کا ایک قطر ہے۔

لیکن بموجب عمل زاویہ ما ماس بھی قائمہ ہے اس لیے ما ماس

ایک خط مستقیم ہے

اب مثلثات ج س ما اور ج سن ما میں

ج س = ج سن

ج ما = ج ما

اور زاویہ سن ج ما = زاویہ سن ج ما

اس لیے مثلثات ج س ما اور ج سن ما ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

اس لیے سن ما = سن ما

پس $س\ م\ a \times س\ م\ a = س\ م\ a \times س\ م\ a = س\ ۲ \times س\ ۱ = ج\ ب$

(بموجب دفعہ ۵۸)

فرض (۱) اگر مرکز ج میں سے ایک خط کھینچا جائے جو ن پر کے ماس کے متوازی ہو اور س ن اور م ن سے بالترتیب نقاط ع اور غ پر ملے تو

$$ن\ ع = ن\ غ = ج\ ا$$

چونکہ ج م ا // ع ن اور ن م ا // غ ج

اس لیے ن م ا ج ع متوازی الاضلاع ہے

$$\text{یعنی } ن\ ع = ج\ م = ج\ ا$$

اسی طرح سے $ن\ ع = ج\ ا$

فرض (۲) اگر ایک ثابت نقطہ س سے ایک متغیر خط پر کے عمود کا پائیں ہمیشہ ایک دائرہ پر واقع ہو جس کے باہر س واقع ہے تو متغیر خط کا نصف ایک زائد ہو گا جس کا ایک ماسکہ س ہے۔

فرض (۳) اگر ایک متغیر خط پر خط کی مخالف جانبوں کے دو ثابت نقطوں سے نکالے ہوئے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہو تو متغیر خط کا نصف ایک زائد ہو گا جس کے ماسکے دیے ہوئے ثابت نقطے ہیں۔

امثلہ ۲۵

(۱) اگر اعدادی دائرہ پر کے کسی نقطہ م میں سے ایک خط مان کھینچا جائے جو ماس پر عمود وار ہے تو ثابت کرو کہ مان زائد کا ایک ماس ہو گا۔

(۲) اگر ایک زاویہ قائمہ کا رأس ایک ثابت دائرہ پر حرکت کرے اور ایک ساق دائرہ مذکور کے باہر کے ایک ثابت نقطہ س میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ دوسری ساق ایک ثابت زائد کو مس کرے گی۔

(۳) اگر زائد کا ایک ماسکہ ایک ماس اور قاطع محور کا طول معلوم ہیں تو دوسرے ماسکے کا طریق معلوم کرو۔

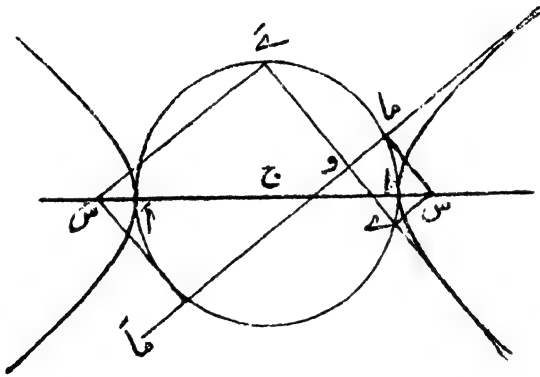
(۴) مرکز دار مخروطی کا ایک ماسکہ اور دو ماس معلوم ہیں ثابت کرو کہ

مرکز کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

(۵) مرکز دار مخروطی کا ایک ماسکہ اور تین ماسس معلوم ہیں۔ مخروطی کا مرکز اور دوسرا ماسکہ معلوم کرو۔

(۶) ثابت کرو کہ ایک مخروطی کے تین ماسوں سے بننے والے مثلث کا حاطط دائرہ مخروطی کے ایک ماسکہ میں سے نہیں گزر سکتا تا وقتیکہ مخروطی مکافی نہ ہو۔

(۷) زائد کا ایک ماس امدادی دائرہ سے ما مآ پر ملتا ہے۔ ایک اور ماس جو ما مآ پر عمود وار ہے امدادی دائرہ سے مے مے پر اور ما مآ سے و پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ $و مآ \times مآ = ج ب^2$



[اشارہ۔ و مآ \times مآ = س مے \times س مے = ج ب^۲]

(۸) سوال بالا میں ثابت کرو کہ ج و = ج ا - ج ب^۲

[اشارہ۔ و مآ \times مآ = ج ب^۲

یعنی ج ا - ج و = ج ب^۲ یعنی ج و = ج ا - ج ب^۲

نوٹ (۱) اس سوال سے ظاہر ہے کہ زائد کے دو علی القوائم ماسوں کے

نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ج ہے اور جس کے نصف قطر کا

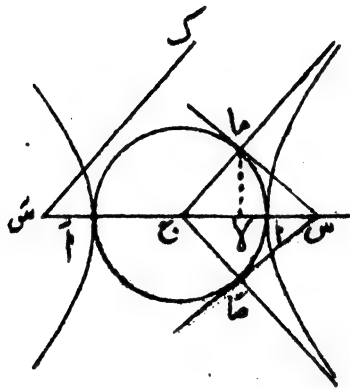
مربع = نیم قاطع محور کا مربع - نیم مزدوج محور کا مربع - اس دائرہ کو زائد کا ہر تب دائرہ کہتے ہیں۔

نوٹ (۲) زائد کے دو علی القوائم ماس صرف اُس صورت میں وجود رکھتے ہیں جبکہ زائد کے قاطع محور کا طول مزدوج محور کے طول سے بڑا ہو۔
(۹) ایک دیے ہوئے نقطہ سے زائد کے ماسات کا جوڑا کھینچو۔

(۱۰) زائد کے ماسات کھینچو جو ایک دیے ہوئے خط کے متوازی ہوں۔

۶۴ - تعریف - اگر زائد کے نقطہ ن پر کا ماس ن ت ہو اور اگر ن سخنی پر حرکت کر کے لاتنا ہی کی طرف مائل ہو تو خط ن ت کے انتہائی مقام کو زائد کا ایک متقارب کہتے ہیں۔ بالفاظ دیگر متقارب سخنی کا وہ ماس ہے جس کا نقطہ تماس لاتنا ہی پر ہے۔

اب ہم ثابت کریں گے کہ زائد کے دو متقارب ہیں جو زائد کے مرکز میں سے گزرتے ہیں۔



ایک ماسکے س میں سے اداوی دائرہ کے ماس میں ما ، س ما کھینچو۔
تب ج ما ، ج ما (مزدوج) زائد کے متقارب ہونگے۔ چونکہ ما اداوی دائرہ پر کا

ایک نقطہ ہے اور ج ما عمود وار ہے اس صابہ اس لیے دفعہ ۱۳ کے مسئلہ کے عکس کی رو سے ج ما زائد کا ایک ماس ہے۔ نیز اس کا نقطہ تماس ن وہ نقطہ ہے جہاں یہ ماس خط مں ک کو قطع کرتا ہے جو کہ دوسرے ماسک مں میں سے ج ما کے متوازی کھینچی گیا ہے اور چونکہ مں ک اور ج ما باہم متوازی ہیں اس لیے ان کا نقطہ تقاطع ن لا تنہای پر ہے۔ پس ثابت ہوا کہ ج ما زائد کا ایک متقارب ہے۔

اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ج ما بھی زائد کا ایک اور متقارب

ہے۔

ظاہر ہے کہ یہ دونوں متقارب زائد کے مرکز ج میں سے گزرتے ہیں اور قاطع محور کے ساتھ مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بناتے ہیں۔ اگر ایک متقارب اور قاطع محور کا درمیانی زاویہ عد ہو تو

$$\text{قو ط ع} = \frac{\text{ج ماس}}{\text{ج ما}} = \frac{1}{1} = 1$$

نیز اگر ما قاطع محور سے لا پر ملے تو ج لا = ج ما × جم ع = ج لا یعنی لا مرتب اور قاطع محور کا نقطہ تقاطع یعنی مرتب کا پائیں ہے اور ما ما ماسک مں کے جواب کا مرتب ہے۔ پس ثابت ہوا کہ زائد کے متقارب اعدادی دائرہ اور مرتب کے نقاط تقاطع میں سے گزرتے ہیں۔

۶۵۔ اگر قاطع محور کے سروں ۲، ۱ میں سے ۱ پر عمود وار خطوط

کھینچے جائیں اور مزدوج محور کے سروں ب، ب میں سے ب ب پر عمود وار خطوط کھینچے جائیں تو ان چار خطوط سے جو مستطیل بنتا ہے اس کے قطر زائد کے متقارب ہونگے۔

ظاہر ہے کہ اس مستطیل کا ہر قطر زائد کے مرکز ج میں سے گزرتا ہے۔

گزرتے ہیں اور ۱۱ پر عمود وار میں زائد کے مرتب ہونگے۔

۶۷۔ اب اگر ہم ایک زائد کھینچیں جس کے قاطع اور مزدوج محور بالتربیب

ب ب اور ۱۱ ہوں (یعنی اول الذکر زائد کے مزدوج اور قاطع محور ہوں) تو ظاہر ہے کہ اس زائد کے متقارب بھی وہی ہونگے جو اول الذکر زائد کے متقارب ہیں۔ مشترک متقاربوں سے بننے والے چار زاویوں میں سے اُن دو مقابل کے زاویوں میں جن کے اندر ۱، ۱ واقع ہیں اول الذکر زائد واقع ہے اور دوسرے دو مقابل کے زاویوں میں جن کے اندر ب، ب واقع ہیں دوسرا زائد واقع ہے۔ بلحاظ اول الذکر زائد کے موخر الذکر زائد کو مزدوج زائد کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ موخر الذکر زائد کے لحاظ سے اول الذکر زائد مزدوج زائد ہوگا۔

کسی زائد اور اس کے مزدوج زائد کے خروج المرکز بالمعوم مساوی نہیں ہوتے۔ اگر مزدوج زائد کا خروج المرکز نہ ہو تو $ز = ا + ب$ اور اگر ایک متقارب مزدوج زائد کے قاطع محور کے ساتھ زاویہ ب بنائے تو $ز = قط ب = قط (۹۰ - ع) = ق م ع$ جہاں متقارب اور ج ۱ کا درمیانی زاویہ ع ہے۔ اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{1}{ز} + \frac{1}{ب} = \frac{1}{ج م ع} + ج ب ع = ا$$

زائد اور مزدوج زائد کے خروج المرکز صرف اُس صورت میں مساوی ہونگے جبکہ $ب = ۱$ یعنی جبکہ متقارب اور قاطع محور کا درمیانی زاویہ ۹۰ کا ہو۔ اس خاص صورت میں متقاربوں کا درمیانی زاویہ قائمہ ہوگا۔

اگر زائد کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ قائمہ ہو تو زائد کو قائم زائد کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ اس صورت میں مزدوج زائد بھی قائم زائد ہوگا۔ نیز ہر ایک خروج المرکز ۱۲ ہوگا۔

امثلہ ۲۶

(۱) قاطع محور کے ایک سرے ۱ پر کا ماس ایک متقارب سے

ف پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج ف = ج س

(۲) ماسکہ س سے ایک متقارب پر عمود س مانکا لایا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ ج ما = ج ا اور س ما = ج ب

(۳) اگر مزدوج زائد کے ماسکے ج، ب ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{ج ب} = \text{ج ب} = \text{ج ا} + \text{ج ب} = \text{ج س}$$

(۴) اگر دو ترخاص مدودہ متقارب سے ک پر ملے تو ثابت کرو کہ

$$\text{س ک} = \text{ز} \times \text{ج ب}$$

(۵) ثابت کرو کہ خط اب ایک متقارب کے متوازی ہے اور

اس کی تقصیف دوسرا متقارب کرتا ہے۔

(۶) ثابت کرو کہ کسی متقارب کے متوازی ایک خط زائد سے

ایک اور حرف ایک نقطہ پر ملتا ہے۔

(۷) اگر ماسکہ س کے جواب کا مرتب ایک متقارب سے ما پر

ملے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ج ما} = \text{ج ا} \text{ اور } \text{ج عا س} = \text{قائمہ}$$

(۸) زائد کا ایک متقارب، دوسرے متقارب کی سمت اور

ایک ماسکہ معلوم ہیں۔ زائد کے رأس معلوم کرو۔

(۹) اگر ایک زائد کے دونوں متقارب اور ایک ماسکہ (جو لازماً متقاربوں

کے درمیانی زاویہ کے ایک منصف پر ہوگا) دیے گئے ہوں تو مرتب معلوم کرو۔

(۱۰) اگر زائد کا مرکز ایک متقارب اور ایک مرتب معلوم ہوں تو ماسکہ معلوم کرو۔

۶۸۔ مسئلہ۔ اگر زائد کے قاطع محور پر عمود وار کوئی خط زائد سے

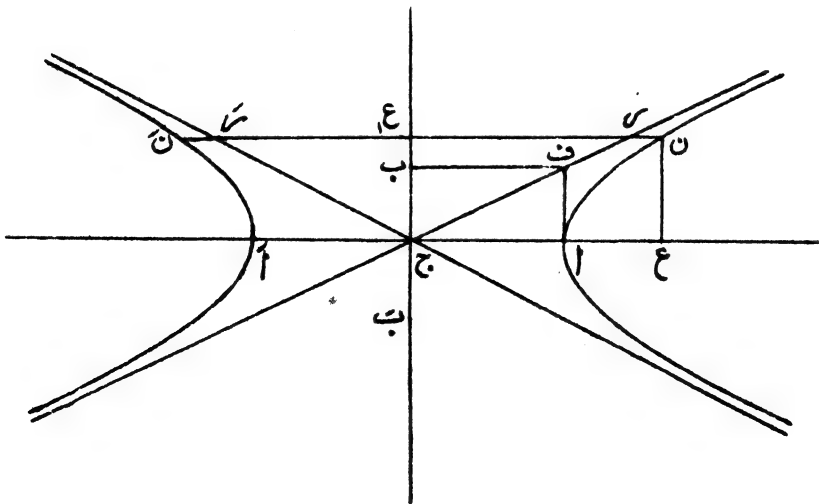
نقاط ن، ن پر اور متقاربوں سے نقاط س، س پر ملے تو

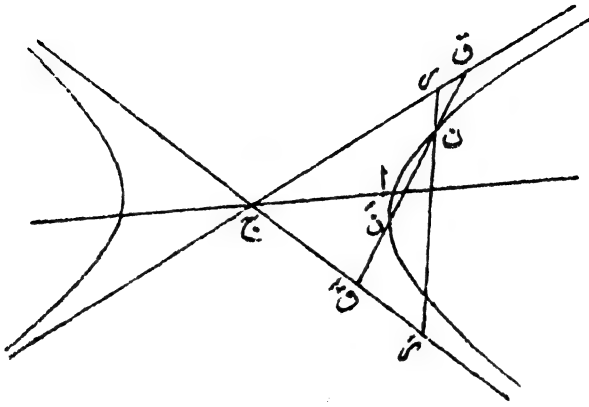
$$\text{س ن} \times \text{ن س} = \text{س ن} \times \text{ن س} = \text{ج ب}$$

یعنی $ع\ سُر = ع\ ن = ج\ ب$
 چونکہ $ن\ ن$ اور $سُر\ سُر$ دونوں کی تنصیف $ع$ پر ہوتی ہے اس لیے
 $سُر\ ن = ن\ سُر$ اور $سُر\ ن = ن\ سُر$ -
 اس لیے $سُر\ ن \times سُر\ ن = سُر\ ن \times ن\ سُر = ع\ سُر - ع\ ن = ج\ ب$
 نوٹ - جیسے جیسے معین $ن\ ع$ کا پائیں $ع$ مرکز $ج$ سے دور
 ہٹتا جاتا ہے $ن\ ع$ کا طول بڑھتا جاتا ہے یعنی $ن\ سُر$ کا طول بڑھتا جاتا ہے،
 اور چونکہ $سُر\ ن \times ن\ سُر$ مستقل رہتا ہے، اس لیے $سُر\ ن$ کا طول بے حد
 گھٹتا جاتا ہے جیسے جیسے نقطہ $ن$ منحنی پر حرکت کر کے لاتنا ہی کی طرف
 جاتا ہے - اس لیے متقارب $ج$ سے نقطہ $ن$ کا عمودی فاصلہ بالآخر
 اُل بے صفر ہوتا ہے - پس معلوم ہوا کہ لاتنا ہی پر متقارب منحنی کے بے حد قریب
 آ جاتا ہے -

۶۹- مسئلہ - اگر زائد کے قاطع محور کے متوازی کوئی خط زائد سے

نقاط $ن\ ن$ پر اور متقاربوں سے نقاط $سُر\ سُر$ پر ملے تو
 $ن\ سُر \times ن\ سُر = ن\ سُر \times سُر\ ن = ج\ ب$





چونکہ خط ق ن ق ایک دی ہوئی سمت میں کھینچا گیا ہے،
اس لیے مثلثوں ن ق سر اور ن ق سر میں سے ہر ایک کے زاویے
غیر متبدل رہتے ہیں۔

اس لیے $\frac{ن ق}{ن سر} = \frac{ن ق}{ن سر}$ مستقل ہے نیز $\frac{ن ق}{ن سر}$ بھی مستقل ہے۔

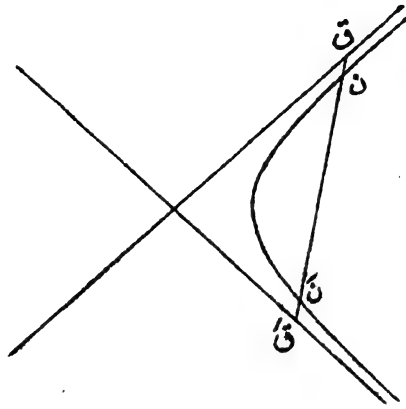
اس لیے $\frac{ن ق \times ن ق}{ن سر \times ن سر}$ بھی مستقل ہے۔

لیکن دفعہ ۶۸ کی رو سے $ن سر \times ن سر$ مستقل ہے۔
اس لیے $ن ق \times ن ق$ بھی مستقل ہے بشرطیکہ خط ق ق کی
سمت نہ بدلے۔

فرع - $ن ق \times ن ق = ن ق \times ن ق$

۷۱۔ مسئلہ - اگر کوئی خط زائد سے نقاط ن پر

اور متقابلوں سے نقاط ق پر لے تو $ن ق = ن ق$
چونکہ $ن ق \times ن ق = ن ق \times ن ق$



اس لیے $ن ق (ن ن + ن ق) = (ن ن + ن ق) ن ق$
 یعنی $ن ق \times ن ن + ن ق \times ن ق = ن ن \times ن ق + ن ق \times ن ق$
 یعنی $ن ق \times ن ن = ن ن \times ن ق$
 یعنی $ن ق = ن ق$

فرع (۱) ق ق کا وسطی نقطہ ن کا بھی وسطی نقطہ ہے۔

فرع (۲) اگر زائد کے نقطہ ط پر کا ماس متقاربوں سے ل ل پر
 پر لے تو ل ل کا وسطی نقطہ ط ہوگا۔

۷۲۔ مسئلہ۔ زائد کے کسی ماس اور متقاربوں سے بننے والے

مثلث کا رقبہ مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ زائد کے کسی نقطہ ن پر کا ماس متقاربوں سے ل ل پر
 ملتا ہے۔

نیز فرض کرو کہ ن میں سے قاطع محور پر عمود وار خط متقاربوں سے س س
 پر ملتا ہے۔ ن میں سے متقارب ج ج کے متوازی خط ن ہ کشیں

اب مثلث ج ل ل میں ضلع ل ل کا وسطی نقطہ ن ہے
 اور ن ہ اور ن ہ بالترتیب ج ل اور ج ل کے متوازی ہیں
 اس لیے مثلث ج ل ل کا رقبہ $= ۲ \times$ متوازی الاضلاع ج ہ ن ہ کا رقبہ
 $= ۲ \times ج ہ \times ج ہ \times جب ہ ج ہ =$
 $= ۲ \times ن ہ \times ن ہ \times جب ۲ =$
 $= ۲ \times \frac{۱}{۲} ب ا^۲ ق م ع \times جب ۲ =$
 $= \frac{۱}{۲} ب ا^۲ ق م ع \times ۲ جب ۲ جم ع =$
 $= \frac{۱}{۲} ب ا^۲ ق م ع \times ۲ جم ع =$
 $= ب ا^۲ جم ع = ب ا^۲ م ع = ب ا^۲ \times \frac{۱}{۲} = اب$

فرع (۱) ج ل \times ج ل مستقل ہے کیونکہ مثلث ج ل ل کا
 زاویہ ج مستقل ہے نیز اس مثلث کا رقبہ بھی مستقل ہے۔
 فرع - اگر رأس ا پر کا ماس متقاربوں سے ف ف پر ملے تو
 ج ل \times ج ل = ج ف \times ج ف = ج ف = ج س

مسئلہ ۲۷

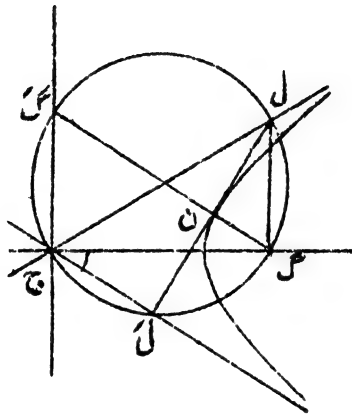
(۱) زائد کے متقارب اور زائد پر کا ایک نقطہ معلوم ہیں۔ زائد کو
 مرتسم کرو۔
 اشارہ - دفعہ ۶۸ کا مسئلہ استعمال کرو۔

(۲) اگر دو متقاطع خطوط مستقیم ج س، ج س پر نقاط س، س اس طرح
 لیے جائیں کہ مثلث ج س س کا رقبہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ س س کے وسطی نقطہ کا
 طریق ایک زائد ہے جس کے متقارب ج س، ج س ہیں۔

(۳) زائد کے نقطہ ن پر کا ماس ایک متقارب سے ل پر
 ملتا ہے اور ل میں سے دوسرے متقارب کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے

جو زائد سے قی پر ملتا ہے۔ اگر ن ق محدودہ متقاربوں سے سرس پر ملے تو ثابت کرو کہ سراسر کے نقاط تثلیث ن اور ق ہیں۔

(۴) زائد کے کسی نقطہ ن پر کا ماس متقاربوں سے ل ل ل پر ملتا ہے اور مثلث ج ل ل کا حاطہ دائرہ زائد کے محوروں سے گ گ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ گ گ نقطہ ن پر کا عماد ہے۔



[اشارہ۔ ل ل ل گ + ل ل گ گ = ل ل ج گ + ل ل ج گ = ل ل ج گ = قائمہ]

اس لیے ل ل ل اور گ گ ایک دوسرے پر عمود وار ہیں

نیز دائرہ ج ل ل کا ایک قطر گ گ ہے

اس لیے گ گ، ل ل کے وسطی نقطہ ن میں سے گزرتا ہے اور

ل ل پر عمود وار ہے۔

اس لیے گ گ زائد کے نقطہ ن پر کا عماد ہے۔

(۵) زائد کا ایک متقارب اور زائد پر کے تین نقطے معلوم ہیں

زائد کو مرسم کرو۔

(۶) زائد کا ایک متقارب، زائد پر کے دو نقطے اور ان نقطوں میں سے ایک پر کا ماس معلوم ہیں۔ زائد کو مرسم کرو۔

(۷) زائد کے نقطے ن پر کا ماس متقاربوں سے ل، ل پر ملتا ہے اور ن پر کا عماد قاطع محور سے گ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ $ل = گ$ ۔

(۸) زائد کا کوئی وتر ن متقاربوں سے ق، ق پر ملتا ہے اور اس وتر کے متعاضی ایک ماس متقاربوں سے ل، ل پر ملتا ہے اور زائد کو ع پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ $ن ق \times ق ن = ع ل$ ۔

(۹) اگر زائد کے کوئی دو ماس کھینچے جائیں تو ان ماسوں اور متقاربوں کے نقاط تقاطع کو ملانے والے خطوط متوازی ہونگے۔

(۱۰) زائد کا ایک متقارب، دو ماس اور ان دو ماسوں میں سے ایک کا نقطہ تماس معلوم ہیں۔ زائد کو مرسم کرو۔

(۱۱) زائد کا کوئی ماس متقاربوں سے ل، ل پر ملتا ہے ثابت کرو کہ ل، ل کو ایک معلوم نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کا طریق ایک زائد ہے۔

(۱۲) زائد کا کوئی ماس متقاربوں سے ل، ل پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ $ج ل \times ج ل = ج س$ اور اس کی مدد سے ثابت کرو کہ مثلثات ل ج س اور س ج ل متشابہ ہیں۔

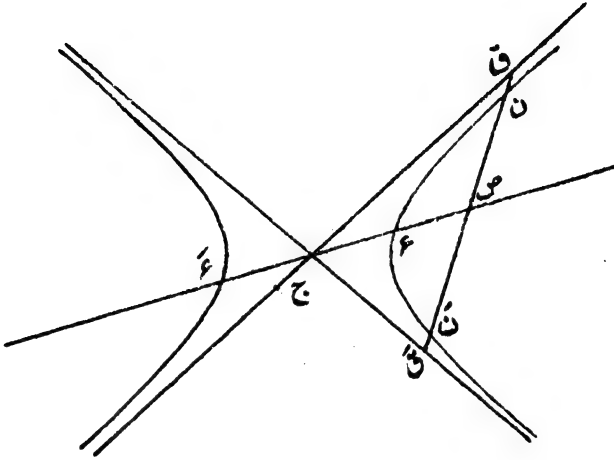
(۱۳) ایک متحرک خط دو ثابت خطوط سے مل کر مستقل رقبہ والا مثلث منقطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ متحرک خط ہمیشہ ایک زائد کو لف کرتا ہے۔

(۱۴) ثابت کرو کہ قائم محوروں کے حوالہ سے مساوات $ل ا = مستقل$ کی ترسیم ایک قائم زائد ہے۔

۷۳۔ مسئلہ۔ اگر زائد کے متوازی دتروں کا ایک نظام ہو تو

ان دتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک ایسا خط مستقیم ہو گا جو زائد کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔ فرض کرو کہ زائد کے متوازی دتروں کے ایک نظام کا کوئی ایک رکن زائد

نقاط ن ن پر اور متقاربوں سے نقاط ق ق پر ملتا ہے۔



فرض کرو کہ ن ن کا وسطی نقطہ ص ہے تب دفعہ ا، کی رو سے ق ق کا وسطی نقطہ بھی ص ہوگا۔

چونکہ ن ن کی یعنی ق ق کی سمت نہیں بدلتی اور نیز متقارب ج ق، ج ق ثابت ہیں اس لیے ق ق کے وسطی نقطہ ص کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو ج میں سے گزرتا ہے۔

پس ثابت ہوا کہ ن ن کے وسطی نقطہ ص کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو زائد کے مرکز ج میں سے گزرتا ہے۔

تعریف - زائد کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی خط مستقیم کو زائد کا قطر کہتے ہیں۔

فہم - اگر زائد کے متوازی دتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والا قطر زائد سے نقاط ع ع پر ملے تو ع ع پر کے ماسات

وترن ن کے متوازی کھینچو۔ فرض کرو کہ ن ن اور ق ق کے وسطی نقطے ص، ص ہیں۔

تب ص، ص میں سے گزرنے والا خط زائد کا ایک قطر ہوگا۔
فرض کرو کہ ن ق قطر ج ص ص سے ط پر ملتا ہے۔

$$\text{تب } \frac{\text{ص ط}}{\text{ص ق}} = \frac{\text{ص ن}}{\text{ص ق}}$$

لیکن از روئے عل ص ن = ص ن اور ص ق = ص ق

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ص ط}}{\text{ص ق}} = \frac{\text{ص ن}}{\text{ص ق}}$$

اس لیے ن ق ط ایک خط مستقیم ہے۔

یعنی ن ق، ن ق کا نقطہ تقاطع ط زائد کے اُس قطر پر واقع ہے
جون ن کے وسطی نقطہ ص میں سے گزرتا ہے۔

اب فرض کرو کہ وتر ق ق اپنے متوازی حرکت کرتا ہوا وترن ن کے قریب آجاتا ہے اور بالآخر ن پر منطبق ہو جاتا ہے۔

تب انتہا میں ن ق اور ن ق بالترتیب ن اور ن پر کے ماس بن جائینگے۔

پس معلوم ہوا کہ وترن ن کے سروں پر کے ماس ایک دوسرے کو اُس قطر پر قطع کرتے ہیں جو وتر مذکور کی تنصیف کرتا ہے۔

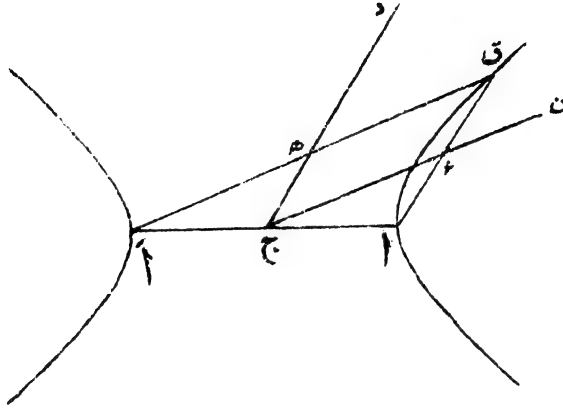
۵۔ مسئلہ۔ اگر زائد کا ایک قطر دوسرے قطر کے متوازی

وتروں کی تنصیف کرے تو دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے گا۔

فرض کرو کہ زائد کا ایک قطر ج ن دوسرے قطر ج د کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے۔

رأس ۱ میں سے ج د کے متوازی وتر ۱ ق کھینچو اور ۱ ق کو ملاؤ

فرض کرو کہ اق اور جن کا نقطہ تقاطع ع ہے اور اق اور ج د کا نقطہ تقاطع ہ ہے۔



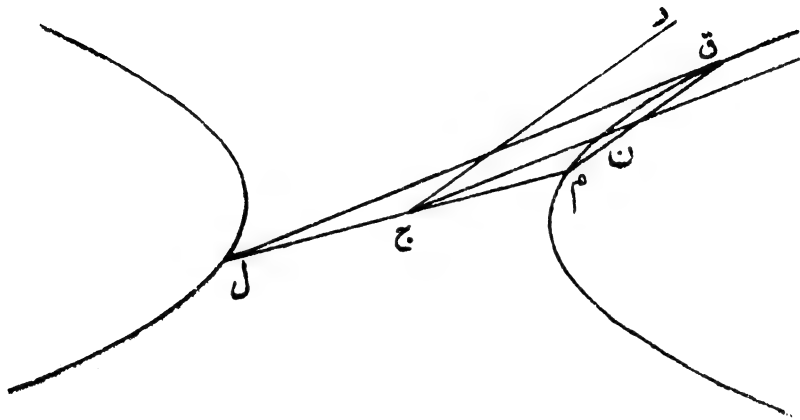
حسب مفروض اق کا وسطی نقطہ ع ہوگا۔
مثلاً اق میں اق کا وسطی نقطہ ع ہے اور ا ج کا وسطی نقطہ ج ہے
اس لیے اق، ج ع کے متوازی ہے۔

ہیں ثابت کرنا ہے کہ وتر اق کا وسطی نقطہ ہ ہے
چونکہ ج ع مثلاً اق کے ضلع ا کے وسطی نقطہ ج میں
سے گزرتا ہے اور ضلع اق کے متوازی ہے اس لیے اق کا وسطی نقطہ
ہ ہے، اس لیے اق کے متوازی وتروں کی تنصیف ج د کرتا ہے۔
یعنی قطر جن کے متوازی وتروں کی تنصیف قطر ج د کرتا ہے۔

تعریف۔ اگر زاویہ کے دو قطر ایسے ہوں کہ ایک قطر کے متوازی وتروں
کی تنصیف دوسرا قطر کرے (اور لازماً دوسرے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف
پہلا قطر کرے) تو ان قطروں کو **عز دوج** قطر کہتے ہیں۔

نوٹ :- زاویہ کے قاطع محور اور مزدوج محور مزدوج قطروں کی خاص صورت ہے۔

۷۶۔ تعریف۔ اگر زائد کے کسی قطر ن ج ن کے سروں
ن، ن کو زائد کے کسی نقطہ ق سے ملایا جائے تو وترن ق اور ن ق
تکمیلی وتر کہلاتے ہیں۔ تکمیلی وتروں کے متوازی قطر مزدوج قطر ہوتے ہیں۔



زائد کے کسی نقطہ ق کو کسی قطر ل ج م کے سروں سے ملاؤ تب ق ل ق م
تکمیلی وتر ہونگے۔

مرکز ج میں سے ج ن، ج د بالترتیب ل ق، م ق کے متوازی
کھینچو۔ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ ج ن، ج د زائد کے مزدوج قطر ہیں۔
چونکہ مثلث ق ل م کے ضلع ل م کے وسطی نقطہ ج میں سے
ج ن، ل ق کے متوازی کھینچا گیا ہے اس لیے ج ن، م ق کی تنصیف
کرتا ہے۔ اس لیے ج ن اُن سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو م ق
کے متوازی ہیں یعنی قطر ج ن اُن سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو قطر ج د
کے متوازی ہیں۔

اس لیے قطر ج د اُن سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو قطر ج ن کے
متوازی ہیں۔

پس ثابت ہوا کہ جن 'ج د مزدوج قطر ہیں۔

مسئلہ ۲۸

(۱) زائد کے وہ وتر کھینچو جن کے وسطی نقطہ ایک دیے ہوئے قطر پر واقع ہیں۔

(۳) نقطہ و سے زائد کے دو ماس دن 'دق کھینچے گئے ہیں۔
ثابت کرو کہ ج و اور ن ق مزدوج قطروں کے ایک زوج کے متوازی ہیں۔
(۴) ثابت کرو کہ زائد کے کسی نقطہ ن پر کا ماس جن کے مزدوج قطر کے متوازی ہے۔

(۴) زائد کے کسی نقطہ ن پر کا ماس متقاربوں سے ل ل پر ملتا ہے اور ل میں سے مزدوج زائد کا ایک ماس ل د ل کھینچا گیا ہے جو مزدوج زائد کو نقطہ د پر مس کرتا ہے اور متقارب ج ل کو ل ل پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ل اور ج د ایک دوسرے کے متوازی ہیں اور طول میں مساوی ہیں۔

[اشارہ - چونکہ مثلث ج ل ل کا رقبہ

= مثلث ج ل ل کا رقبہ

اس لیے ل ل کا وسطی نقطہ ج ہے۔

نیز ل ل کا وسطی نقطہ د ہے

اس لیے ج د متوازی ہے ل ل کے اور ج د = ل ل = ن ل]

(۵) سوال بالا کی ترقیم کے مطابق ثابت کرو کہ جن 'ج د مزدوج

قطر ہیں۔

(۶) ثابت کرو کہ ن د کا وسطی نقطہ متقارب ج ل پر ہے۔

(۷) ثابت کرو کہ مثلث ج ن د کا رقبہ مستقل ہے۔

(۸) اگر جن 'ج د زائد کے مزدوج قطر ہوں تو ثابت کرو کہ یہ

مزدوج زائد کے بھی مزدوج قطر ہیں۔

(۹) زائد کے مزدوج قطروں میں سے صرف ایک قطر زائد سے

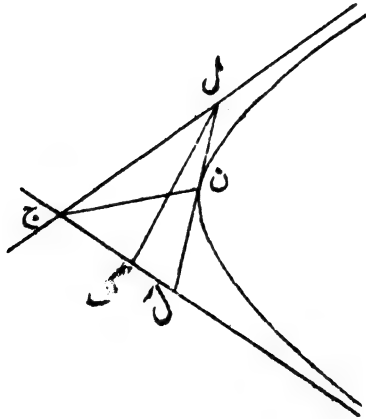
حقیقی نقطوں پر ملتا ہے اور دوسرا قطر مزدوج زائد سے حقیقی نقطوں پر ملتا ہے۔
 (۱۰) زائد کے مزدوج قطروں میں سے ایک قطر زائد سے نقاط 'ن' 'ن' پر
 اور دوسرا قطر مزدوج زائد سے نقاط 'د' 'د' پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ نقاط 'ن' 'ن'
 'د' 'د' پر کے مماسات سے ایک متوازی الاضلاع بنتا ہے جس کے راس متقاربوں پر
 ہیں اور جس کا رقبہ مستقل مقدار $\frac{1}{2}ab$ کے مساوی ہے۔

(۱۱) زائد کے کسی نقطہ 'ن' پر کا مماس ایک متقارب سے 'ل' پر ملتا ہے
 ثابت کرو کہ ج'ن - ن'ل = ج'ا - ج'ب (جو مستقل ہے)
 فرض کرو کہ 'ن' پر کا مماس دوسرے متقارب سے 'ل' پر ملتا ہے
 'ل' سے ج'ل پر عمود 'ل' نکالو۔

چونکہ 'ل' کا وسطی نقطہ 'ن' ہے اس لیے ج'ل + ج'ل = ج'ل

$$ج'ل + ج'ل = ج'ل$$

$$نیر ج'ل + ج'ل - ج'ل = ج'ل \times ج'ک = ل'ل = ل'ن = ج'ل$$



پس حاصل ہوتا ہے کہ ج'ل \times ج'ک = ج'ن - ن'ل

$$اب ج'ل \times ج'ک = ج'ل \times ج'ل \times \frac{ج'ک}{ج'ل} = مستقل$$

(کیونکہ ج ل x ج ل مستقل ہے اور نیز ج ل بھی مستقل ہے)۔

پس ثابت ہوا کہ ج ن' - ج ل' مستقل ہے۔

اب اگر مماس کا نقطہ تماس راس ۱ پر آ جائے تو

$$\text{ج ن} - \text{ن ل} = \text{ج ا} - \text{ج ب}$$

(۱۲) اگر زائد کے مزدوج قطروں میں سے ایک قطر زائد سے نقطہ ن

اور دوسرا قطر مزدوج زائد سے نقطہ د پر ملے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ج ن} - \text{ج د} = \text{ج ا} - \text{ج ب}$$

نوٹ (۱۱) - اگر دو مزدوج قطروں میں سے ایک قطر زائد سے نقطہ ن پر اور

دوسرا قطر مزدوج زائد سے نقطہ ق پر ملے تو ج د کے طول کو نیم قطر ج ن کے مزدوج قطر کا طول کہتے ہیں۔

نوٹ (۱۲) - اوپر کے سوال میں زائد کے مزدوج قطروں کے متعلق ذیل کا

مسئلہ ثابت ہوا ہے - ”زائد کے نیم مزدوج قطروں کے مربعوں کا فرق مستقل ہوتا ہے“

(۱۳) اگر دیا ہوا زائد قائم زائد ہو تو ثابت کرو کہ ج ن = ج د

نیز ثابت کرو کہ ج ن، ج د متقارب کے ساتھ مساوی زاویے مخالف سمتوں میں بناتے ہیں۔

(۱۴) ثابت کرو کہ قائم زائد کا کوئی وتر اور اس کے وسطی نقطہ میں سے

گزرنے والا قطر کسی متقارب کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

(۱۵) ثابت کرو کہ قائم زائد کے تکمیلی وتروں کا کوئی زوج کسی متقارب

سے مساوی زاویے بناتا ہے۔

(۱۶) قائم زائد پر ایک نقطہ ن لیا گیا ہے اور اس کے مزدوج زائد پر

ایک نقطہ د اس طرح لیا گیا ہے کہ زاویہ ج ن د قائم ہے ثابت کرو کہ

$$\text{ج ن} = \text{ج د}$$

مسئلہ ۲۹

(زائد پر متفرق سوالات)

(۱) کاغذ پر ایک زائد کھینچا ہوا ہے۔ اس کے ضروری اجزاء معلوم کرو۔

(۲) زائد کی ایک ہی شاخ پر کے دو نقطوں ن اور ن پر کے ماسوں

کا نقطہ تقاطع وہ ہے۔ ثابت کرو $\angle س و ن + \angle س و ن = ۲ قائے$

[اشارہ - فرض کرو کہ ن اور ن زائد کی اُس شاخ پر ہیں جس کے اندر ماسکس ہے۔ فرض کرو کہ س ن، س ن سے ہ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\angle س و ن = ۲ قائے - \angle س و ن \times \frac{۱}{۲}$$

نیز ثابت کرو کہ $\angle س و ن = \angle س و ن \times \frac{۱}{۲}$]

(۳) زائد کی مختلف شاخوں پر کے دو نقطوں ن اور ن پر کے ماسوں

کا نقطہ تقاطع وہ ہے، ثابت کرو کہ $\angle س و ن = \angle س و ن$

[اشارہ - فرض کرو کہ س ن اور س ن ایک دوسرے کو ہر

قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ $\angle س و ن = \angle س و ن \times \frac{۱}{۲}$

اور $\angle س و ن = \angle س و ن \times \frac{۱}{۲}$]

(۴) زائد کا کوئی ماس متقاربوں سے ل، ل پر ملتا ہے۔

ثابت کرو کہ ل ل کے مجازی کسی ایک ماسک پر مستقل زاویہ بنتا ہے۔

(۵) ایک خط ایک ثابت نقطہ ن میں سے گزرتا ہے اور دو ثابت

علی القواع خطوں و ا، و ب سے ا اور ب پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ

ا ب کے وسطی نقطہ کا طریق ایک قائم زائد ہے۔

[اشارہ - و ن کے وسطی نقطہ ج میں سے و ا، و ب کے

متوازی خطوط ج لا، ج ماکھینچو۔ ثابت کرو کہ ج لا، ج ماسے ا ب کے

وسطی نقطہ کے عمودی فاصلوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔

(۶) زائد کے اُن وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرو

جو زائد کے ایک متقارب پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

(۷) قائم زائد پر کے دو نقطے اور مرکز معلوم ہیں۔ قائم زائد کو قسم کرو۔

[اشارہ - اگر دیے ہوئے نقطوں ن اور ن کو ملانے والے وتر کا وسطی نقطہ

ص ہو اور اگر ن متقاربوں سے سر، سر پر ملے تو ج ص = ص سر = ص سر اور اس کی مدد سے متقارب کھینچ سکتے ہیں]

(۸) ایک دی ہوئی سمت میں کھینچا ہوا کوئی خط دو ثابت زائدوں سے

جن کے متقارب مشترک ہیں نقاط ن، ن اور ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ

ن ق × ق ن مستقل ہے۔

(۹) کوئی خط زائد کے متقاربوں سے سر، سر اور مزدوج قطروں کے

کسی ایک زوج سے ن، ن پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ سر، سر کی موسیقی تقسیم ن، ن پر ہوتی ہے۔

[اشارہ - فرض کرو کہ ج ن زائد سے ع پر ملتا ہے، ع پر کا ماس

ج ن کے متوازی ہوگا اگر ع پر کا ماس متقاربوں سے ل، ل پر ملے تو

ل ع = ع ل اس لیے ج (مہر ن سر ن) موسیقی پیل ہے۔

اس لیے سر سر کی موسیقی تقسیم ن، ن پر ہوتی ہے۔

(۱۰) زائد پر کے دو نقطوں ق، ق پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع

وہے، وہیں سے متقاربوں کے متوازی خطوط کھینچے گئے ہیں جو متقاربوں

سے م، م پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ م، م ق، ق کے متوازی ہے۔

[اشارہ - فرض کرو کہ ق، ق متقاربوں سے سر، سر پر ملتا ہے۔

تب ج و، سر سر کے وسطی نقطہ میں سے گزرے گا۔ نیز چونکہ ج م، و م

متوازی الاضلاع ہے اس لیے ج و، م م کے وسطی نقطہ میں سے

گزرتا ہے یعنی سر سر اور م م دونوں کے وسطی نقطے ج و پر واقع ہیں۔

اس لیے ضروری ہے کہ سر سر // م م]

(۱۱) ایک ثابت نقطہ ن میں سے کوئی خط کھینچا گیا ہے جو دو ثابت خطوط ولا، وما سے ق، ق پر ملتا ہے اور ق ق پر نقطہ ن اس طرح لیا گیا ہے کہ ق ن = ق ن۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک زائد ہے جس کے متقارب ولا، وما ہیں۔

(۱۲) ا ب ج د ایک مربع ہے۔ ایک قائم زائد کھینچا ہے جس کے متقارب ا ب، ا د ہیں اور ایک ماسکہ ج ہے۔ ثابت کرو کہ یہ زائد اضلاع ج ب، ج د کے وسطی نقطوں میں سے گزرتا ہے۔

(الف) ضمیمہ

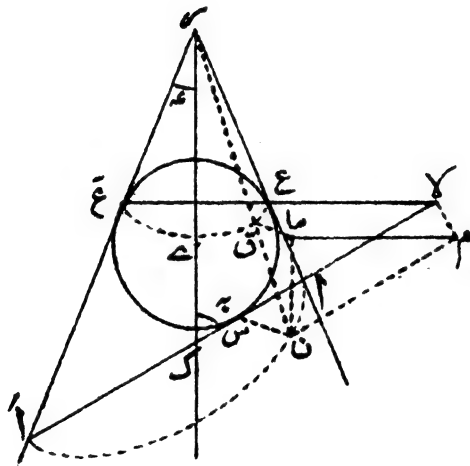
مستدیر مخروط کی مستوی تراشیں

تاریخی نوٹ — مخروطات کے خواص کے ابتدائی انکشافات Menaechmus سے منسوب کیے جاتے ہیں جو چوتھی صدی قبل مسیح میں گزرا ہے۔ مخروطات پر سب سے پہلی منظم بحث اقلیدس (۲۸۴ تا ۲۲۳ قبل مسیح) نے اپنی ایک کتاب میں کی تھی۔ لیکن یہ کتاب اب کالعدم ہے۔ Appolonius (۲۶۲ تا ۲۰۵ قبل مسیح) کی مشہور کتاب "Kwvika" کا ماخذ اقلیدس کی مذکورہ بالا کتاب ہی تھی۔ Appolonius کی اس کتاب میں مخروطات کے غیر ماسکی خواص پر نہایت مکمل بحث درج ہے۔ اور نیز یہ ثابت کیا گیا ہے کہ مستدیر مخروط کو مختلف میلان والی مستوی سطحوں سے قطع کرنے سے مخروطی کی مختلف قسمیں حاصل ہوتی ہیں۔ مخروطی کی مختلف قسموں کے نام بھی Appolonius ہی کے وضع کردہ ہیں۔

مخروطات کی ماسکہ مرتب خاصیت کا ذکر پہلے پہل Pappus (۳۰۰ سال بعد مسیح) نے اپنی ایک کتاب میں کیا ہے۔ مگر اس اہم خاصیت پر Newton کے زمانہ تک کوئی قابل لحاظ تحقیقات وجود میں نہیں آئیں۔ نیوٹن کی کتاب Principia میں اس خاصیت اور اس کے مستنبطات پر مدلل بحث مندرج ہے۔ حقیقی ماسکوں کے نظریہ کی تشریح Kepler (۱۵۷۱ تا ۱۶۳۰ء) نے کی ہے اور لفظ "Focus" اسی کا وضع کردہ ہے۔ لیکن وہ طریقہ جس میں مستدیر مخروط کی مستوی تراش کی

ماسک مرتب خاصیت کی تحقیق میں ماسکی کرہ کا استعمال کیا گیا ہے۔
Dandelin Morton (۱۸۲۲ء) اور (۱۸۲۵ء) کا ایجاد کردہ ہے۔

مسئلہ - اگر ایک قائم مستدیر مخروط کا نیم راسی زاویہ α ہو اور اگر ایک سطح مستوی ایسی کھینچی جائے جو مخروط کے محور کے ساتھ زاویہ β بنائے تو مستوی تراش ایک مخروطی ہوگی جس کا خروج مرکز نقطہ α جسم β ہوگا



مخروط کے اندر ایک کرہ بناؤ جو مخروط کو دائرہ E Q C پر اور سطح تقاطع کو S پر مس کرے۔ اس کرہ کا مرکز S مخروط کے محور S R K پر واقع ہے جو سطح تقاطع کو K پر قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ کاغذ کی سطح، سطح S R K سے ہے جو مخروط کو خطوط S R K پر قطع کرتی ہے۔ فرض کرو کہ دی ہوئی مستوی سطح مخروط کے متناهی تقاطع پر کا کوئی نقطہ N ہے۔

فرض کرو کہ مستوی E Q C G F A N M K S R K پر قطع کرتی ہے۔ فرض کرو کہ N سے سطح E Q C G F A N M K S R K پر عمود N M K ہے اور فرض کرو کہ

سران مستوی ع ق ع کو ق پر قطع کرتا ہے۔ ماق کو ملاؤ اور ماسے لام پر عمود صام نکالو۔ ن م کو ملاؤ۔ مستوی ان ا میں نقطہ س میں سے گزرنے والا ہر خط کرہ (ے) کا ماس ہے اور اس لیے س ہے پر (جو کاغذ کی سطح میں ہے) عمود وار ہے۔ اس لیے مستوی ان ا کاغذ کی سطح پر عمود وار ہے نیز سطح ع ق ع بھی کاغذ کی سطح پر عمود وار ہے۔

اس لیے مستویوں ع ق ع اور ان ا کا خط تقاطع لام کاغذ کی سطح پر عمود وار ہے اور اس لیے خط ا ا پر عمود وار ہے۔

چونکہ ن ماس سطح ع ق ع پر عمود وار ہے اور مام خط لام پر عمود وار ہے، اس لیے ن م خط لام پر عمود وار ہے۔

اس لیے ن م متوازی ہے ا ا کے

نیز ن م متوازی ہے مراک کے کیونکہ ان میں سے ہر ایک خط سطح ع ق ع پر عمود وار ہے۔

اس لیے $\angle \text{مان م} = \angle \text{راک ا} = ۹۰$

نیز $\angle \text{ق ن م} = \angle \text{ق راک} =$ مخروط کا نیم راسی زاویہ ع

اب مثلث ق ن م میں $\angle \text{ق مان} = ۹۰$

اس لیے ق ن = ن م \times قطع

مثلث ن مام میں $\angle \text{ن مام} = ۹۰$

اس لیے ن م = مام \times جم

اس لیے ق ن = ن م قطع جم

لیکن ن ق = ن س کیونکہ دونوں کرہ (ے) کے ماس ہیں۔

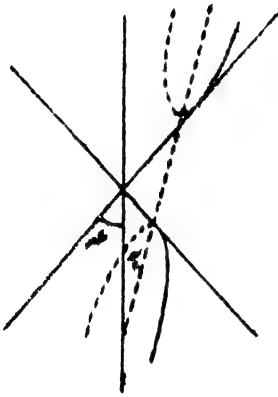
اس لیے س ن = ن م \times قطع جم

اس لیے $\frac{\text{س ن}}{\text{ن م}} = \frac{\text{قطع جم}}{\text{مستقل}}$

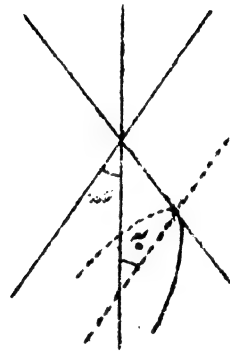
اس لیے ن کا طریق ایک مخروطی ہے جس کا ماسک س ہے، مرتب

لام ہے اور خروج المرکز قطع جم ہے۔

فزع - ایک دیے ہوئے مخروط کی مختلف مستوی تراشوں کے لیے مخروطی تراش کا خروج مرکز Z ایسے بدلتا ہے جیسے جسم بہ
 نوٹ (۱) اگر $b = e$ تو $Z = A$
 تب قاطع مستوی مخروط کے ایک تکوینی خط کے متوازی ہوگا اور مخروطی تراش ایک
 میکانی ہوگی (دیکھو شکل ذیل ۱)۔



شکل ۱۔

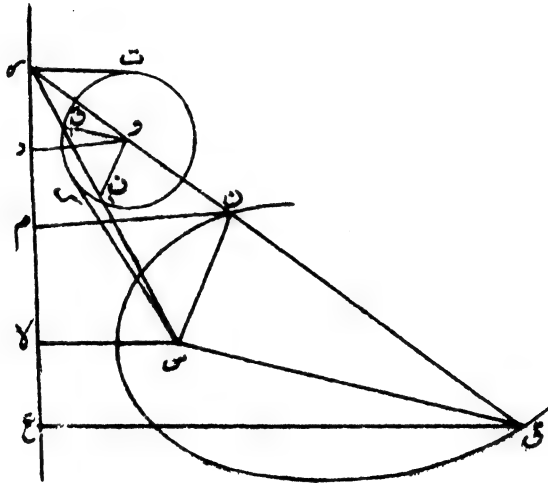


شکل ۲۔

اگر $b < e$ تو $Z > A$
 تب مخروطی تراش ایک ناقص ہوگی
 اگر $b > e$ تو $Z < A$
 تب قاطع مستوی دہرے مخروط کی دونوں شاخوں کو قطع کریگا اور مخروطی تراش
 زائد ہوگی۔ (دیکھو شکل بالا ۲)
 نوٹ (۲) کرہ (۳) کو ماسکی کرہ کہتے ہیں کیونکہ یہ کرہ قاطع سطح مستوی کو
 مخروطی تراش کے ایک ماسکہ پرس کرتا ہے۔

ضمیمہ (ب)

نیوٹن کا مسئلہ - اگر کسی نقطہ سے دی ہوئی سمتوں میں دو خط کھینچے جائیں جو ایک دیے ہوئے مخروطی سے نقاط 'ق' اور 'ن' پر ملیں تو

$$\frac{ون \times وق}{ون \times وق} \text{ مستقل ہوگا۔}$$


فرض کرو کہ خط مستقیم 'ون' ق مرتب سے 'س' پر ملتا ہے،
و سے مرتب پر عمود و د نکالو اور و کو مرکز مان کر 'ز' \times د نصف قطر والا دائرہ
کھینچو۔ 'س' کو تلاؤ اور فرض کرو کہ 'س' سے دائرہ و سے نقاط 'ن'، 'ق' پر

ملتا ہے۔

ن، ق سے مرتب پر عمود ن، م، ق، ع نکالو۔

$$\text{تب } \frac{\text{م ن}}{\text{ن و}} = \frac{\text{ز} \times \text{ن م}}{\text{ز} \times \text{و د}} = \frac{\text{ن م}}{\text{و د}} = \frac{\text{ن سر}}{\text{و سر}}$$

اس لیے شکل بالا میں مثلثات سر ن، م اور سر و ن متشابہ ہیں

اس لیے ن، م متوازی ہے، ن، و کے

اسی طرح سے ق، م متوازی ہے، ق، و کے

فرض کرو کہ خط مستقیم و ن، ق محرومی کے مرتب سے زاویہ طہ بناتا ہے۔

م اور م سے دائرہ (و) کے مماس م، ک اور م، رات کھینچو۔

$$\text{چونکہ ن، م // و ن، اس لیے } \frac{\text{م ن}}{\text{م رات}} = \frac{\text{و ن}}{\text{و سر}}$$

$$\text{نیز چونکہ ق، م // و ق، اس لیے } \frac{\text{م ق}}{\text{م رات}} = \frac{\text{و ق}}{\text{و سر}}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{و ن} \times \text{و ق}}{\text{و سر}} = \frac{\text{م ن} \times \text{م ق}}{\text{م رات} \times \text{م رات}} = \frac{\text{م ک}^2}{\text{م رات}^2}$$

$$\text{اب م رات}^2 = \text{و سر}^2 - \text{و ن}^2 = \text{و سر}^2 - \text{ز}^2 \times \text{و د}^2$$

$$\text{اور چونکہ } > \text{و سر د} = \text{طہ} \text{ اس لیے } \text{و د} = \text{و سر} \times \text{جب طہ}$$

$$\text{اس لیے م رات}^2 = \text{و سر}^2 - \text{ز}^2 \times \text{و سر}^2 \text{ جب طہ} = \text{و سر}^2 (1 - \text{ز}^2 \text{ جب طہ})$$

$$\text{اس لیے و ن} \times \text{و ق} = \text{م ک}^2 \times \frac{\text{و سر}^2}{\text{م رات}^2}$$

$$= \frac{\text{م ک}^2}{1 - \text{ز}^2 \text{ جب طہ}}$$

اگر خط و ن، ق مرتب سے زاویہ طہ بنائے تو حسب بالا ثابت کیا جاسکتا

$$\text{ہے کہ و ن} \times \text{و ق} = \frac{\text{م ک}^2}{1 - \text{ز}^2 \text{ جب طہ}}$$

اس لیے $\frac{\text{ون} \times \text{وق}}{\text{ون} \times \text{وق}} = \frac{\text{ا۔ ز ۲ جب ط}}{\text{ا۔ ز ۲ جب ط}}$ جو مستقل ہے۔

نوٹ (۱) مسئلہ بالا کے استعمال میں یاد رہے کہ 'ون' 'وق' 'ون' 'وق' کے طول لینے میں مقدار اور علامت دونوں ملحوظ رکھے جانے چاہئیں۔

نوٹ (۲) اس نتیجہ کی کئی ایک اہم خاص صورتیں ہیں۔

(۱) اگر 'ون' 'وق' اور 'ون' 'وق' کے متوازی ماسکی وتر عس ہ

$$\frac{\text{ا۔ ز ۲ جب ط}}{\text{ا۔ ز ۲ جب ط}} = \frac{\text{س ۶} \times \text{س ۵}}{\text{س ۶} \times \text{س ۵}} = \frac{\text{ون} \times \text{وق}}{\text{ون} \times \text{وق}}$$

(۲) اگر 'ون' 'وق' اور 'ون' 'وق' کے متوازی ماسات طے

$$\frac{\text{ا۔ ز ۲ جب ط}}{\text{ا۔ ز ۲ جب ط}} = \frac{\text{ط ۶} \times \text{ط ۵}}{\text{ط ۶} \times \text{ط ۵}} = \frac{\text{ون} \times \text{وق}}{\text{ون} \times \text{وق}}$$

(۳) مرکزدار مخروطی کی صورت میں اگر 'ون' 'وق' اور 'ون' 'وق' کے متوازی

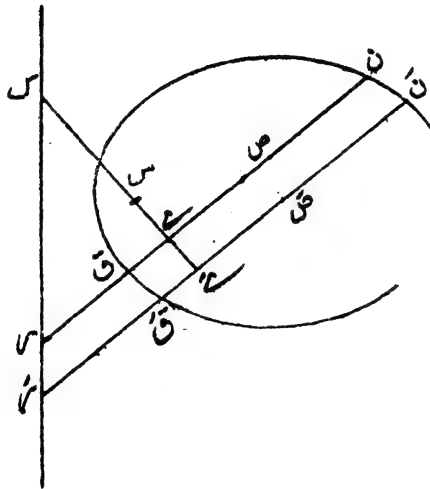
$$\frac{\text{قطر د ج د} \times \text{ع ج ع}}{\text{قطر د ج د} \times \text{ع ج ع}} = \frac{\text{ون} \times \text{وق}}{\text{ون} \times \text{وق}} = \frac{\text{ج د} \times \text{ج د}}{\text{ج د} \times \text{ج د}} = \frac{\text{ج د}}{\text{ج د}}$$

نوٹ (۳) نیوٹن کے مسئلہ کی مدد سے صفحات ۲۶، ۳۴ اور ۶۰ کے

نتائج باسانی مائل ہو سکتے ہیں۔

ضمیمہ (ج)

مسئلہ۔ مخروطی کے متوازی دتروں کے ایک نظام کے وسطی لفظوں کا طریق ایک خط مستقیم ہوتا ہے جو اس نقطہ میں سے گزرتا ہے جہاں ماسکہ میں سے دتروں پر کا عمود متناظر مرتب سے ملتا ہے۔



فرض کرو کہ متوازی دتروں کے دیے ہوئے نظام کا ایک مرکز ن ق ہے اور اس کا وسطی نقطہ ص ہے۔

فرض کرو کہ ماسکہ س سے ن ق پر کا عمود ن ق سے سے پر اور ماسکہ س کے جواب کے مرتب سے ک پر ملتا ہے۔

محردلی کے مرکز میں سے گزرنے والا خط ہے۔

نوٹ (۲) چونکہ مکانی کا دوسرا راس α لاتناہی پر ہوتا ہے اس لیے
 α کا وسطی نقطہ ج (یعنی مکانی کا مرکز) بھی لاتناہی پر ہے اس لیے مکانی کی
 صوریات متوازی دتروں کے وسطی نقطوں کا طریق مکانی کے محور سے لاتناہی پر ہوتا ہے۔
 یعنی مکانی کے محور کے متوازی ہوتا ہے۔

یہ خط

ہندی مخروطات

صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط
۵ تا ۱۰	۱۱ تا ۵	۴	۸۸	مخروطات	مخروطات	پیشانی	۳۳
۴	۴	شکل کے دائیں جانب	=	مخروطیوں	مخروطیوں	=	۳۵
۴	۴	شکل کے بائیں جانب	۸۸	م س محدود کے	م س کے	۲	=
خ		شکل سے	۹۱	ن ن	ن ن	۲۱	=
ج ب	ج ب			م		شکل میں	۴۰
ج ۱	ج ۱	۱۴	۹۴	ع	ع	شکل	۴۲
جم		۱۲	۹۷	منطبق	منطبق	۱	۴۹
				ہیں	ہیں	۶۱۳	۵۹۵۲
				د اور مکانی	د مکانی	۱۰	۶۶
				طاؤ	طاؤ	۱۴	=
				گذرنے	گذرنے	۱	۷۳
				مکانی	مکانی	۷	=
				ن		۲	۸۶

صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط
ب		۱۲۶	شکل میں	ماس	ماس	۱۸	۱۱۰
مقادیر	مقادیر	۲۱	۱۳۱	۲		شکل میں	۱۱۴
ج ب	ج ب	۳	۱۳۲	دیا		۱	۱۱۸
س ح	س ح			ج	ج	دہری شکل میں	۱۲۰
دیے		۱۳	۱۳۰	ج	ج	بائی شکل میں	=
ماسکہ	مانسکہ	۱۸	۱۳۳	ص		بالائی بائیں شکل میں	۱۲۲
گزر تا	گسر تا	۲۳	۱۶۱	ھ		زیرین شکل میں	=
ق		۱۴۴	شکل میں	مزدوج			
نقطہ تقاطع	نقطہ تقاطع	۱۴	۱۸۱			۲۳	۱۲۳

مکتبہ
مکتبہ

